
ROCA VILA
introducción a la mecánica de los fluidos
LIMUSA
NORIEGA EDITORES

EL AUTOR

El Dr. Reclus Roca Vila, después de obtener su bachillerato en París, se graduó de Ingeniero Civil en la Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela, en 1953, ingresando como Instructor en la Universidad Central de Venezuela al año siguiente, desde donde alternó la docencia con el ejercicio profesional, hasta 1960. En 1961 y 1965 obtuvo sucesivamente los títulos de Master of Science y de Doctor of Philosophy (Ph. D.) en Mecánica Teórica y Aplicada en la Universidad de Michigan.
Desde entonces, dedicado a la docencia, ha escrito o tiene en preparación, además del presente libro, textos de mecánica y de teoría de las vibraciones. Es autor de varios trabajos en su campo, experto UNESCO en Quito, (1969), es actualmente Profesor Titular de las Universidades Central de Venezuela y Simón Bolívar.
Es Miembro del Colegio de Ingenieros de Venezuela, de la Sociedad Venezolana de Ingeniería Hidráulica, de la Société des Ingénieurs Civils de France, de The American Society of Civil Engineers, de The Society of the Sigma-Xi.

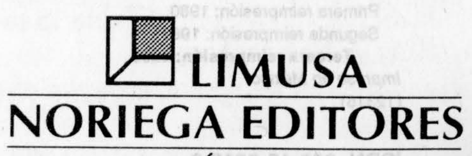
Introducción a la Mecánica de los Fluidos

!! A juicio de quien lea este texto, todos los comentarios anexos a cada expresión - formula- y esquema.

COLECCION "CIENCIAS DEL INGENIERO"

Introducción a la Mecánica de los Fluidos

R. ROCA VILA, Ph. D.
Universidad Central de Venezuela
Universidad Simón Bolívar



LIMUSA
NORIEGA EDITORES
MÉXICO
España • Venezuela • Argentina
Colombia • Puerto Rico

GRUPO NORIEGA EDITORES
Balderas 95, C.P. 06040, México, D.F.
Teléfono 521-21-05
Fax 512-29-03

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Registro número 121

Primera edición: 1978
Primera reimpresión: 1980
Segunda reimpresión: 1987
Tercera reimpresión: 1993
Impreso en México
(12315)

ISBN 968-18-0619-0

A Chia-Shun YIH
mi maestro y amigo

"No hay cultura sin cultura científica".

Agradecimiento

El autor agradece a las siguientes editoriales la autorización concedida de usar las siguientes referencias, de su Propiedad.

DUNOD Editeur, por las figuras 7-26 y 12-29, sacadas de la obra *Mécanique des Fluides* de E. A. Brun, A. Martinot-Lagarde.

McGraw-Hill, por la Tabla 18, sacada de *Boundary Layer Theory* de H. Schlichting, y por la Tabla 15 sacada del *Piping Handbook*, de R. King & S. Crocker.

Macmillan por los ejercicios 1-10, 2-10 y 4-2 sacados de *Fluid Flow* de Sabersky & Acosta.

Wiley, por los ejercicios 3-13, 3-15, 6-10, sacados del libro *Fluid Mechanics*, de A. G. Hansen.

Prólogo

Este texto puede considerarse una introducción por varias razones. En primer lugar, está escrito sin suponer conocimientos previos sobre el tema, aunque, naturalmente, se basa en aquellos conceptos de matemáticas y de mecánica que todo ingeniero normalmente domina. Por otra parte, su propósito es el de presentar de manera sistemática las leyes generales que rigen el movimiento de los fluidos, de ilustrarlas y de mostrar sus aplicaciones más inmediatas. Sólo pretende pues, en este sentido, establecer una base firme sobre la cual pueda apoyarse y avanzar una auténtica tecnología.

Es nuestra firme convicción, en efecto, que sólo con una presentación unificada y sintetizada se pueden alcanzar la eficiencia y la eficacia necesarias para enfrentarse exitosamente a la explosión de información que inunda actualmente el mundo de la ciencia y de la técnica. Por esta razón se ha dado una cierta generalidad matemática a la presentación de los distintos temas, sin por ello dejar de lado los aspectos experimentales y de aplicación, tan importantes en esta materia.

Por otra parte, para facilitar el uso del libro como texto, los capítulos más especializados han sido redactados de manera a ser independientes unos de otros, todos ellos basados en las leyes generales antes aludidas. Asimismo, ciertas secciones y ejercicios de los primeros capítulos marcados con un asterisco, pueden ser omitidos sin perjuicio.

Con referencia al aspecto pedagógico, creemos que no se puede seguir haciendo perder el tiempo de las nuevas generaciones con el estudio y el uso de sistemas de unidades destinados a desaparecer. Por esta razón se utiliza en el texto, casi sin excepción, el sistema internacional llamado S. I. ó M. K. S., cuyas ventajas huelga discutir.

Esperamos que este último aspecto del libro no alejará de su lectura a los profesionales con cierta trayectoria, cuyo interés pudiera ser motivado por los temas tratados. Por otra parte, la puesta al día de ciertos aspectos importantes puede ser, según esperamos, motivo de reflexión por parte de Ingenieros con experiencia en este campo.

Queda por ver si todos estos propósitos, al ser puestos sobre el papel, habrán sido cabalmente cumplidos, y a este efecto, se agradecerán al lector todas las observaciones que tenga a bien hacernos, en especial aquellas que tiendan a demostrar lo contrario.

Caracas, 1977 *R. Roca Vila*

Contenido

Indice de tablas

Principales símbolos usados

Coordenadas

x, y, z	Coordenadas cartesianas de un sistema de referencia fijo
$\bar{r}$	Vector de posición
s	Abscisa curvilínea
t	Tiempo
$\bar{u}, u_x, u_y, u_z$	Velocidad y sus componentes cartesianas
U	Magnitud de la velocidad
$\bar{a}, a_x, a_y, a_z$	Aceleración y sus componentes cartesianas
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	Vectores unitarios de los ejes cartesianos
$r, \ , z$	Coordenadas cilíndricas o polares
u_r, u_θ, u_z	Componentes cilíndricas de la velocidad
$\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$	Vectores unitarios de un sistema cilíndrico

Otros símbolos

A	Area
c_p	Calor específico a presión constante
c_v	Calor específico a volumen constante
E	Energía interna
e	Energía interna específica
$\bar{F}$	Fuerza
g	Aceleración de gravedad

$\overline{G}$	Vector aceleración de las fuerzas de volumen
H	Entalpía
h	Entalpía específica
k	Constante de gases: $k = c_p/c_v$
$\widetilde{k}$	Conductividad térmica
$\overline{L}$	Cantidad angular de movimiento o momento cinético
m	Masa
$\dot{m}$	Caudal en masa
p	Presión
Q	Calor
R	Constante de un gas ideal
S	Entropía
s	Entropía específica
T	Energía cinética
V	Volumen
v	Volumen específico
$\dot{V}$	Caudal en volumen
W	Trabajo
β	Coeficiente de dilatación cúbica
γ	Peso específico
θ	Temperatura
H	Temperatura absoluta
ϕ	Potencial de velocidades
λ	Coeficiente de dilatación lineal
μ	Viscosidad dinámica
ν	Viscosidad cinemática
ψ	Función de corriente
ρ	Densidad
τ	Esfuerzo cortante
κ	Difusividad
ω	Velocidad angular
Ω	Energía potencial
σ	Esfuerzo normal

CAPITULO 1

Propiedades Físicas de los Fluidos

1.1 Introducción

DESDE NO hace mucho tiempo se sabe que los estados de la materia son cuatro, a saber: sólido, líquido, gaseoso y plasma. Este último consiste en el estado que se alcanza generalmente con muy altas temperaturas o muy bajas presiones, cuando las moléculas de distintas sustancias se disgregan y se ionizan. De estos cuatro grandes grupos, cuyas definiciones aproximadas se pueden entonces dar por conocidas, dos de ellos, los *líquidos* y los *gases* han sido tradicionalmente agrupados bajo el nombre de fluidos. Modernamente el movimiento de los plasmas se estudia también a partir de ecuaciones parecidas a las que rigen el movimiento de los fluidos.

Cabe señalar sin embargo, que esta división es un tanto artificial, pues existen en la naturaleza o creados por el hombre, productos que no encuadran claramente en el marco rígido de la clasificación tradicional. Así, por ejemplo, las pinturas al aceite son unos *líquidos* que se comportan en cierta forma como un sólido plástico, y ciertos *sólidos*, como el alquitrán y hasta el acero, tienen propiedades que se califican de viscosas.

Por esta razón ha surgido una nueva rama de la ciencia, llamada Reología, que abarca las tradicionales ciencias de la resistencia de materiales y elasticidad, por una parte y de la mecánica de los fluidos

por otra, *así como los casos intermedios*, los cuales se distinguen con los nombres de viscoelasticidad, etc.[1] Aunque en el presente texto se va a estudiar el aspecto clásico de la mecánica de los fluidos, se indicarán en esta introducción algunos de los resultados de la Reología con el objeto de ubicar aquélla en el conjunto de conocimientos que se tienen actualmente sobre el comportamiento mecánico de la materia.

Cabe destacar además, que en este texto, así como en la reología toda, se adopta un punto de vista macroscópico, esto es, se habla de propiedades medidas en el laboratorio sobre muestras de materia de dimensiones finitas. En oposición, cabría hacer un estudio microscópico, es decir un estudio de la composición y la estructura molecular y cristalina, de la cual se debieran poder reducir las propiedades macroscópicas que se observan en el laboratorio.

Esto es lo que se hace la llamada "Ciencia de los Materiales". Sus conclusiones amplían y completan nuestro conocimiento de las propiedades de la materia.[2] Sin embargo, del punto de vista del ingeniero, los resultados de un estudio macroscópico son todavía hoy los más directamente utilizables en la solución de los problemas concretos que se presentan.

1.2 Propiedades reológicas de fluidos y sólidos

Por lo indicado anteriormente se comprende que la reología haya sido definida como el estudio de la deformación y del flujo de la materia.

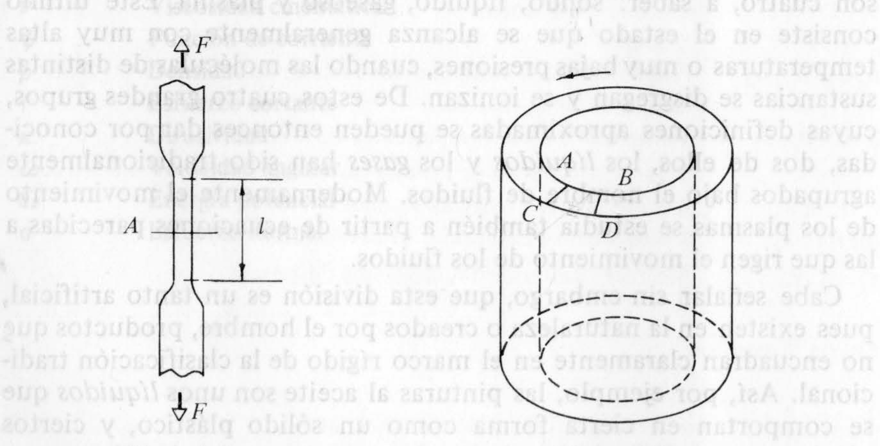


Figura 1.1. Figura 1.2.

[1] M. Reiner, *Rhéologie Théorique*, Dunod, 1955.

[2] Van Vlack, *Elements of Materials Science*, Addison-Wesley, 1964

Sea por ejemplo una barra metálica sometida a tracción o a una masa de líquido que separa dos cilindros concéntricos en rotación. El material que constituye la barra o el líquido sufren una deformación y oponen una resistencia medible por las fuerzas o los pares que actúan. En el caso de la barra, se mide la deformacion por el alargamiento Δl de un trozo de la barra inicialmente de longitud l. Se llama pues deformación a

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \qquad (1\text{-}1)$$

En el caso del líquido, si se considera un elemento ABCD, suficientemente pequeño para hacer la curvatura despreciable, se comprende que la deformación relativa es de tipo cortante. Si $d\alpha$ es el ángulo en que se deforma el "rectángulo de fluido" ABCD en el intervalo dt se tiene

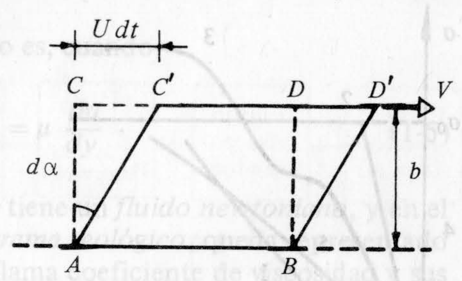


Figura 1.3.

$$d\alpha = \frac{U\,dt}{b}, \text{ o sea } \dot{\alpha} = \frac{U}{b} \qquad (1\text{-}2)$$

Para hacer más precisa la medida de esta deformación angular, se supone al elemento ABCD muy pequeño, en cuyo caso la velocidad de la capa CD con respecto a la capa AB se puede llamar du, siendo el espesor dy. Entonces (1-2) se puede escribir

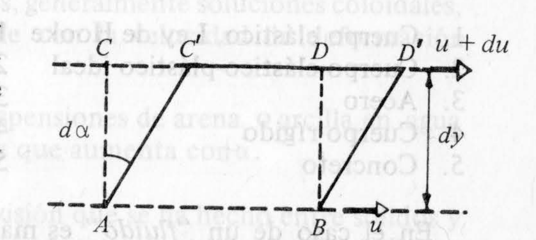


Figura 1.4.

$$\dot{\alpha} = \frac{du}{dy}, \qquad (1\text{-}3)$$

fórmula que se adoptará como medición de la *velocidad de deformación angular* del elemento considerado, y que será generalizada en un próximo capítulo.

¿Qué relación existe entre las fuerzas aplicadas y las deformaciones o velocidades de deformación resultantes? Esta es la primera pregunta que debe responder un experimento efectuado sobre un trozo de materia cualquiera. Es sabido que si se trata de un *"sólido"* se obtiene generalmente una relación del tipo.[3]

$$\sigma = f(\epsilon)$$

donde $\sigma = \dfrac{F}{A}$ es el esfuerzo aplicado, esto es, la fuerza por unidad del área sobre la cual actúa:

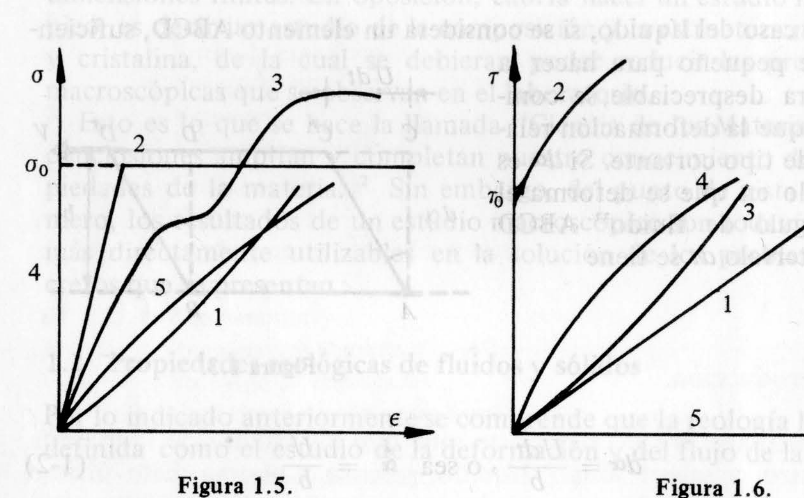


Figura 1.5. **Figura 1.6.**

Relación $\sigma = f(\epsilon)$ para un sólido

1. Cuerpo elástico, Ley de Hooke
2. Cuerpo elástico-plástico ideal
3. Acero
4. Cuerpo rígido
5. Concreto

Relación $\tau = f(\dot{\alpha})$ para un líquido

1. Fluido newtoniano
2. Fluido plástico (Bingham)
3. Fluido dilatante
4. Fluido pseudo plástico
5. Fluido ideal

En el caso de un *"fluido"* es más significativo observar la deformación angular $\dot{\alpha}$ y en este caso, el esfuerzo que la produce es de tipo cortante $\tau = \dfrac{F}{A}$. Experimentalmente se encuentran entonces para distintas clases de fluidos, relaciones del tipo

[3] E. Lévi, *Elementos de Mecánica del Medio Continuo,* Wiley-Limusa, 1971.

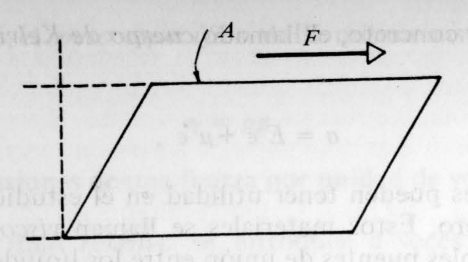


Figura 1.7.

$$\tau = f(\dot{\alpha})\,. \tag{1-4}$$

Cuando esta relación es lineal, esto es, cuando

$$\tau = \mu\,\dot{\alpha} = \mu\,\frac{du}{dy}, \tag{1-5}$$

siendo μ constante, se dice que se tiene un *fluido newtoniano*, y en el diagrama $\tau = f(\dot{\alpha})$, *llamado diagrama reológico*, queda representado por una recta. La constante μ se llama coeficiente de viscosidad y sus propiedades se estudiarán en detalle más abajo.

Otros tipos de fluidos, llamados globalmente no-newtonianos, son:

a) El líquido de Bingham (1919): Necesita de un esfuerzo cortante inicial para que empiece a fluir. Es el caso típico de las pinturas de aceite.

b) Fluido pseudo-plástico: Estos, generalmente soluciones coloidales, tienen una viscosidad variable con la velocidad de deformación angular $\dot{\alpha}$, tal como se indica.

c) Fluido dilatante: Ciertas suspensiones de arena o arcilla en agua tienen una viscosidad aparente que aumenta con $\dot{\alpha}$.

Cuerpos viscoelásticos: La división que se ha hecho entre sólidos y fluidos es, como se apuntó anteriormente, un tanto artificial. En un cuerpo actúan generalmente esfuerzos normales σ y esfuerzos cortantes τ y no hay razón para que éstos sean *sólo* funciones de ϵ ó bien *sólo* funciones de $\dot{\alpha}$. En todo caso, el fenómeno de fluencia en el acero y otros materiales, o las propiedades elásticas de ciertas soluciones de aluminio en hidrocarburos, muestran que para estos casos, por lo menos, el comportamiento mecánico es representable mediante una ecuación del tipo

$$\sigma = f(\epsilon, \dot{\alpha}). \tag{1-6}$$

Como ejemplo concreto, el llamado *cuerpo de Kelvin* responde a la relación

$$\sigma = E\epsilon + \mu\,\dot{\epsilon}\,, \tag{1-7}$$

y sus propiedades pueden tener utilidad en el estudio de la fluencia en cables de acero. Estos materiales se llaman *viscoelásticos* y son unos de los posibles puentes de unión entre los líquidos y los sólidos.

Para terminar con esta introducción a las propiedades físicas de los fluidos, se acompaña un esquema donde se indica su posición con respecto a los otros grupos existentes de "materiales" de la naturaleza.

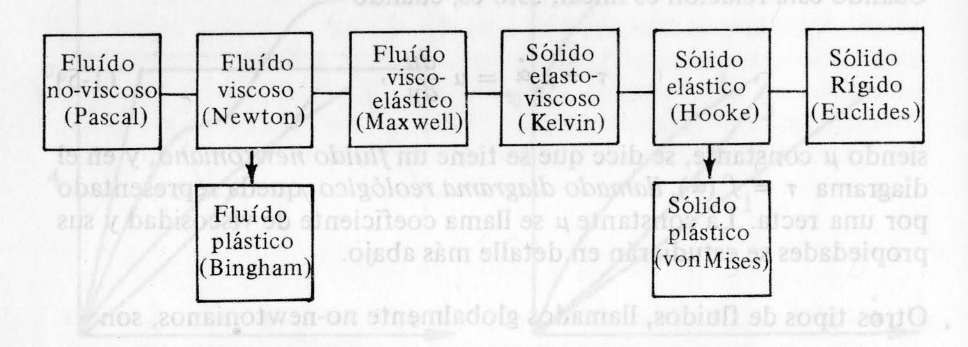


Figura 1.8.

1.3 Densidad y peso específico. Unidades

Como se sabe, se llama densidad media de una sustancia cualquiera a su masa por unidad de volumen

$$\rho = \frac{m}{V}\,. \tag{1-8}$$

Cuando esta definición no es suficientemente precisa, se hace tender el volumen a cero, y se define la densidad de la sustancia en un punto por

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{1-8}$$

Las dimensiones de la densidad son pues

$$[\rho] = ML^{-3} = FL^{-4}T^{2}. \tag{1-9}$$

Por otra parte, el *peso específico* de la misma sustancia se define por

$$\gamma = \rho g \tag{1-10}$$

y tiene las dimensiones de una fuerza por unidad de volumen.

El peso específico relativo se introduce a veces como la razón entre el peso específico de la sustancia considerada y el de una sustancia de *referencia*, generalmente el agua.
Esto es, el peso específico relativo es

$$\delta = \frac{\gamma}{\gamma_0}\,,$$

y así mismo, la densidad relativa

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_0}$$

Estas magnitudes y las que se introduzcan ulteriormente se medirán en este texto en el sistema *MKS* de unidades métricas, designado ultimamente como *SI*, es decir *Sistema Internacional*. Como ayuda para aquellos lectores que no están todavía familiarizados con él se acompaña la tabla 1.5 que permite la comparación con otros sistemas, aún en boga en ciertos medios.

1.4 Fluidos newtonianos. Viscosidad

Después de considerar el esquema anterior, por lo demás todavía incompleto, queda claro que el tipo más simple de fluido es el fluido newtoniano, definido como se ha visto, por la relación

$$\tau = \mu\,\frac{du}{dy} \tag{1-11}$$

El *coeficiente de viscosidad* es constante, en el sentido que no depende de $\dot{\alpha}$, de manera que la relación (1-11) aparece en el diagrama $\tau = f(\dot{\alpha})$ como una recta. Depende sin embargo de otros factores físicos, en particular de la temperatura y de la presión. Esta dependencia se explica al considerar la interpretación microscópica-molecular de la viscosidad. Este es, en efecto, uno de los casos en los cuales consideraciones de tipo molecular arrojan cierta luz sobre el

comportamiento macroscópico de la materia. Desde el punto de vista microscópico, *la viscosidad*, es decir, la resistencia a la deformación de un fluido, tiene un doble origen: por una parte las moléculas se atraen entre sí mediante fuerzas de cohesión que dificultan un desplazamiento relativo y, por otra parte, la agitación térmica produce una transferencia de cantidad de movimiento entre capas que no se mueven con la misma velocidad. Como resultado de este doble efecto, la viscosidad resulta depender de la temperatura y de la presión.

$$\mu = \mu\ (\theta, p). \tag{1-12}$$

En el caso de los líquidos, las fuerzas cohesivas son preponderantes y disminuyen con un aumento de temperatura. En el caso de los gases la transferencia de la cantidad de movimiento origina principalmente la viscosidad. Por ello, en los gases μ aumenta con la temperatura. En cuanto a la presión, su influencia es pequeña y generalmente se desprecia.

Las dimensiones físicas de la viscosidad μ se obtienen, recordando (1-11)

$$\mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}}$$

y resultan ser

$$[\mu] = \frac{F}{L^2}\ \frac{L}{LT^{-1}} = \frac{FT}{L^2} = \frac{M}{LT} \tag{1-13}$$

En cuanto a sus unidades, en el sistema internacional *MKS* se tiene

$$[\mu] = \frac{kg}{m \cdot seg} = \frac{N \cdot seg}{m^2} \tag{1-14}$$

y en el sistema técnico de unidades métricas, por ejemplo,

$$[\mu] = \frac{kg_f \cdot seg}{m^2} \tag{1-15}$$

Así el agua a 20°C tiene una viscosidad de

$$\mu \cong 10^{-3}\ \frac{kg}{m \cdot seg}$$

Viscosidad cinemática: Como se observa en (1-13), las dimensiones de μ contienen las tres unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo. Resulta conveniente definir una nueva propiedad del fluido, por la relación

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{1-16}$$

donde ρ es la densidad. Se obtiene así en la llamada *viscosidad cinemática*, cuyo nombre proviene de que sus dimensiones son únicamente de tipo cinemático.
En efecto,

$$[\nu] = \frac{M}{LT}\ \frac{L^3}{M} = \frac{L^2}{T}. \tag{1-17}$$

En contraposición con la viscosidad cinemática ν, se llama a veces a la viscosidad μ, *viscosidad dinámica*, nombre que también se "justifica" por sus dimensiones.

Al adoptar la ley (1-11) como definición de un fluido newtoniano queda claro que se ha colocado la noción de viscosidad en una posición central. Por una parte los fluidos no-newtonianos corresponden a leyes más complicadas que la (1-11), y por otra parte, un *fluido sin viscosidad*, esto es con $\mu = 0$ habrá de ser una idealización extrema, que no corresponda a la realidad física. Sin embargo, por motivos de simplificación se estudiarán también en estas notas las propiedades de los *fluidos no-viscosos*, algunas de las cuales se aplican, con ciertas salvedades, a los fluidos reales, esto es, *viscosos*.

En este particular es conveniente preguntarse qué efectos sobre el fluido en movimento tienen los esfuerzos cortantes internos τ, y ver de qué manera se transforma la energía mecánica que produce el movimiento del fluido. Sin entrar por ahora en consideraciones matematicas detalladas, se puede ver intuitivamente que los esfuerzos cortantes τ aplicados a un elemento de volumen dV introducen en dicho elemento una energía por unidad de tiempo dada por

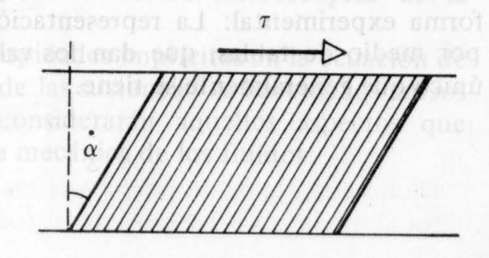


Figura 1.9.

$$dW = \tau\ \dot{\alpha}\ dV \tag{1-18}$$

o sea, para un fluido viscoso newtoniano,

$$W = \int_{(v)} \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dV \tag{1-19}$$

Esta energía mecánica recibida desde el exterior es la que mantiene el fluido viscoso en movimiento, y la que se consume en dicho proceso transformándose en calor. *El movimiento de un fluido viscoso es pues un proceso disipativo*, según (1-19). Una de las grandes simplificaciones que aporta la hipótesis de los fluidos no-viscosos que se consideran por idealización, es justamente el de ser *sistemas conservativos*, en los cuales la energía mecánica no se degrada.

1.5 Ecuación de estado

Cuando un fluido está mecánica y térmicamente en equilibrio, su "estado" puede ser caracterizado por unas pocas magnitudes macroscópicas, que lo definen completamente. Si la sustancia es homogénea, por ejemplo, se tiene la presión p, la temperatura θ y el volumen específico $v = 1/\rho$, como coordenadas termodinámicas. Ahora bien, estas tres magnitudes no son independientes. Para un fluido dado, si se conocen dos de ellas, la tercera queda determinada, esto es, la tercera puede ser obtenida experimentalmente mediante una medición adecuada hecha en el fluido.

Existe pues una relación entre las magnitudes p, θ, ρ que es característica de la sustancia:[4]

$$f(p, \theta, \rho) = 0, \tag{1-20}$$

relación llamada *ecuación de estado*. Esta ecuación no es necesariamente conocida en forma analítica, pero sí se la puede obtener en forma experimental: La representación gráfica de los resultados, o por medio de tablas, que dan los valores implícitos en (1-20) es lo único que generalmente se tiene.

[4] F.W.Sears, *Mecánica, Calor y Sonido;* Aguilar
M. Alonso, E.J.Finn, *Physics*, Addison-Wesley

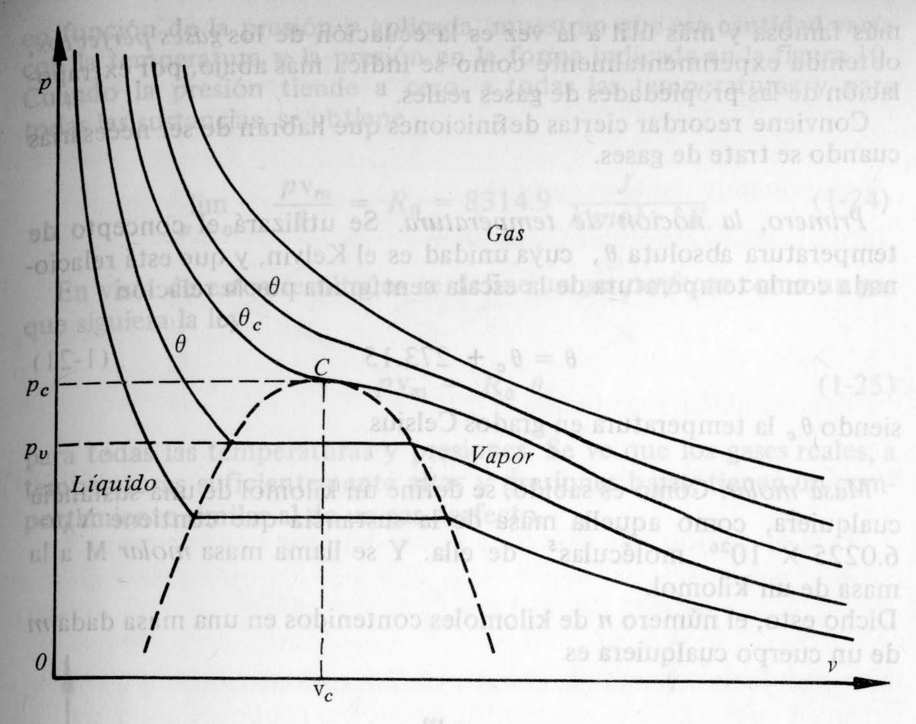


Figura 1.10.

Gráficamente si se representa (1-20) en un sistema de 3 coordenadas p, θ, ρ se obtiene una superficie que resume todos los posibles estados de equilibrio de la sustancia. En dos dimensiones se acostumbra representar la ecuación de estado usando $v = 1/\rho$, y p como coordenadas y θ como parámetro. Para cada valor de θ se tiene una curva isoterma, como indica el diagrama. Se ha observado que todas las sustancias tienen un comportamiento global parecido, regido naturalmente por las leyes de la estructura microscópica de la materia.

El estudio detallado de las propiedades implícitas en la ecuación de estado y en el diagrama p, v, de las sustancias se hace en los cursos de Termodinámica. Aquí se considerarán aquellos aspectos que pueden tener importancia para la mecánica de los fluidos.

1.6 Gases perfectos

Con el objeto de tener una expresión analítica que represente la ecuación de estado de una sustancia, por lo menos en forma aproximada, se han propuesto muchas ecuaciones, válidas en ciertas zonas del campo total de variación de las coordenadas termodinámicas. La

más famosa y más útil a la vez es la ecuación de los *gases perfectos*, obtenida experimentalmente como se indica más abajo, por extrapolación de las propiedades de gases reales.

Conviene recordar ciertas definiciones que habrán de ser necesarias cuando se trate de gases.

Primero, la noción de temperatura. Se utilizará el concepto de temperatura absoluta θ, cuya unidad es el Kelvin, y que está relacionada con la temperatura de la escala centígrada por la relación

$$\theta = \theta_c + 273.15 \tag{1-21}$$

siendo θ_c la temperatura en grados Celsius

Masa molar. Como es sabido, se define un kilomol de una sustancia cualquiera, como aquella masa de la sustancia que contiene $N_A = 6.0225 \times 10^{26}$ moléculas[5] de ella. Y se llama masa *molar* M a la masa de un kilomol.

Dicho esto, el número n de kilomoles contenidos en una masa dada m de un cuerpo cualquiera es

$$n = \frac{m}{M} \tag{1-22}$$

donde

$$[M] = \frac{kg}{kmol}$$

Por otra parte, si se trata de un gas que ocupa un volumen V, se define el volumen específico molar como

$$v_m = \frac{V}{n} \tag{1-23}$$

donde

$$[v_m] = \frac{m^3}{kmol}$$

Dicho esto, se ha de referir que los *resultados experimentales* obtenidos al medir, para un gas real, el cociente

$$\frac{p\,v_m}{\theta}$$

[5] N_A es el número de Avogrado.

en función de la presión p aplicada, muestran que esa cantidad varía con la temperatura y la presión en la forma indicada en la figura 10. Cuando la presión tiende a cero, a todas las temperaturas y para todas las sustancias, se obtiene

$$\lim_{p \to 0} \frac{p\,v_m}{\theta} = R_0 = 8314.9 \frac{J}{k\,mol \cdot {}^\circ K}. \tag{1-24}$$

En vista de estos resultados se define un *gas perfecto* como un gas que siguiera la ley

$$p\,v_m = R_0\,\theta \tag{1-25}$$

para todas las temperaturas y presiones. Se ve que los gases reales, a temperaturas suficientemente altas y presiones bajas, tienen un comportamiento similar al de un gas perfecto.

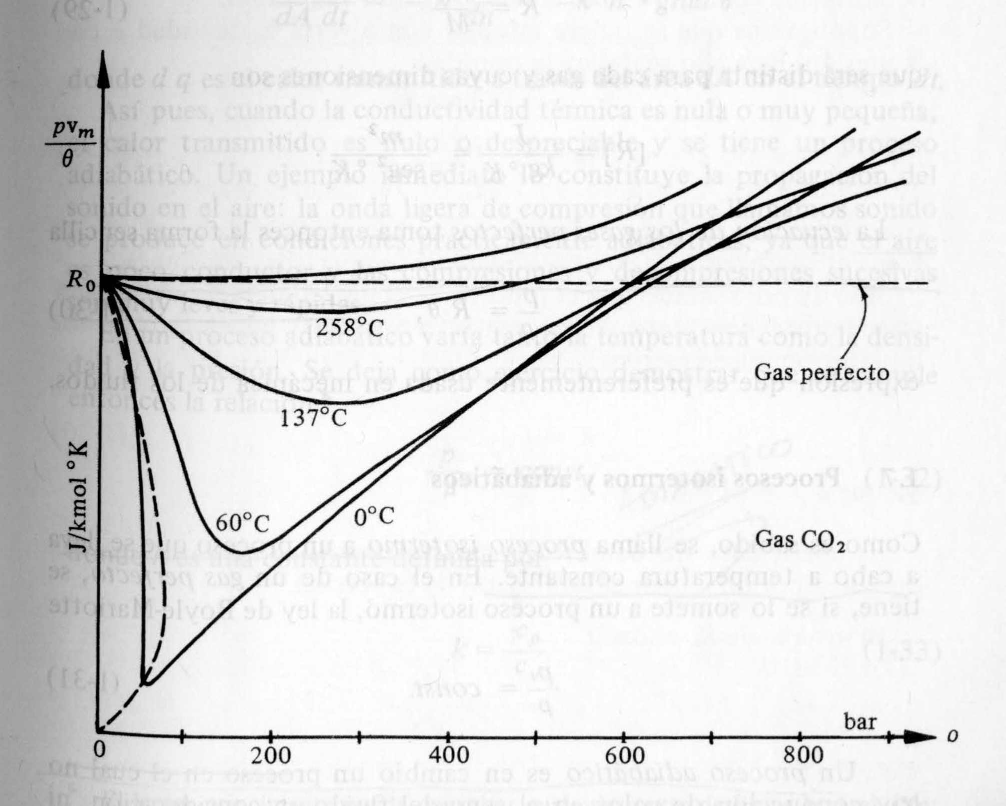


Figura 1.11.

La ecuación de estado de un gas perfecto puede tomar varias otras formas. Recordando la definición de v_m, se puede escribir

$$pV = n\ R_0\,\theta, \tag{1-26}$$

expresión muy usada en química.

Introduciendo el volumen específico

$$v = \frac{V}{m} \tag{1-27}$$

se tiene también, recordando (1-22),

$$p\,v = \frac{R_0}{M}\,\theta \tag{1-28}$$

Para simplificar esta expresión puede definirse una constante R,

$$R = \frac{R_0}{M} \tag{1-29}$$

que será distinta para cada gas y cuyas dimensiones son

$$[R] = \frac{J}{kg\ {}^\circ K} = \frac{m^2}{seg^2\ {}^\circ K}\ .$$

La *ecuación de los gases perfectos* toma entonces la forma sencilla

$$\frac{p}{\rho} = R\ \theta, \tag{1-30}$$

expresión que es preferentemente usada en mecánica de los fluidos.

1.7 Procesos isotermos y adiabáticos

Como es sabido, se llama *proceso isotermo* a un proceso que se lleva a cabo a temperatura constante. En el caso de un *gas perfecto*, se tiene, si se lo somete a un proceso isotermo, la ley de Boyle-Mariotte

$$\frac{p}{\rho} = \ const. \tag{1-31}$$

Un *proceso adiabático* es en cambio un proceso en el cual no hay conducción de calor en el seno del fluido en consideración, ni tampoco entre él y el medio circundante. El fenómeno de conduc-

ción se caracteriza por una constante $\widetilde{k}$ llamada *conductividad térmica*, que relaciona el calor transmitido a través de una superficie en el seno de la sustancia en cuestión, por unidad de tiempo, y el gradiente de temperatura existente. La llamada ley de Fourier se escribe

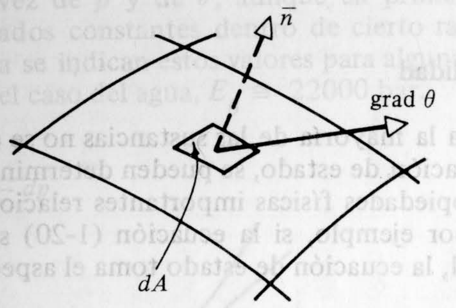


Figura 1.12.

$$\frac{dq}{dA\ dt} = \widetilde{k}\ \frac{d\theta}{dn} = \widetilde{k}\ \bar{n}\cdot grad\ \theta$$

donde $d\,q$ es el calor transmitido a través del área dA en el tiempo dt.

Así pues, cuando la conductividad térmica es nula o muy pequeña, el calor transmitido es nulo o despreciable y se tiene un proceso adiabático. Un ejemplo inmediato lo constituye la propagación del sonido en el aire: la onda ligera de compresión que llamamos sonido se produce en condiciones practicamente adiabáticas, ya que el aire es poco conductor y las compresiones y decompresiones sucesivas son muy leves y rápidas.

En un proceso adiabático varía tanto la temperatura como la densidad y la presión. Se deja como ejercicio demostrar que se cumple entonces la relación [6]

$$\frac{p}{\rho^k} = const \tag{1-32}$$

donde k es una constante definida por

$$k = \frac{c_p}{c_v} \tag{1-33}$$

[6] El lector principiante puede consultar cualquier texto de Física general. (Ver también Sección 7-2-7.)

siendo a su vez c_p y c_v los calores específicos a presión y a volumen constante del gas, respectivamente.

El valor de la constante k para distintos gases reales, cuyo comportamiento pueda aceptarse como perfecto en condiciones normales, está dado en la tabla 1.2.

1.8 Compresibilidad

Aun cuando para la mayoría de las sustancias no se conoce, como se ha dicho, su ecuación de estado, se pueden determinar experimentalmente varias propiedades físicas importantes relacionadas con dicha ecuación. Así, por ejemplo, si la ecuación (1-20) se escribe despejando la densidad, la ecuación de estado toma el aspecto

$$\rho = \rho\,(p, \theta), \tag{1-34}$$

En esta forma se expresa más claramente que la densidad está determinada cuando se fijan la temperatura y la presión.

Supongamos que se quiera estudiar cómo varía la densidad ρ con la presión. Para ello se define la cantidad

$$K_\theta = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_\theta, \tag{1-35}$$

que alcanzará un valor experimental a una presión dada, y que se llama el *coeficiente de compresibilidad* a temperatura constante.

Si se da por sentado que el proceso de compresión se va a realizar a temperatura constante, como ocurre en general en el caso de los líquidos, se puede escribir

$$K = -\frac{1}{V}\,\frac{dV}{dp}, \tag{1-36}$$

ya que $\rho\, V = m = const.$

El coeficiente de compresibilidad es pues el cambio relativo de volumen por un incremento unitario de la presión.

El inverso de K, es decir

$$E_\theta = -V\,\frac{dp}{dV}, \tag{1-37}$$

o también

$$dp = -E_\theta\,\frac{dV}{V} = E_\theta\,\frac{d\rho}{\rho}, \tag{1-38}$$

se llama *módulo de compresibilidad*, y respresenta la relación entre un incremento de presión dado y el correspondiente cambio de volumen por unidad de volumen.

Los resultados experimentales muestran que tanto E_θ como K son funciones a su vez de p y de θ, aunque en primera aproximación pueden ser tomados constantes dentro de cierto rango usual. En la tabla 1.1 adjunta se indican estos valores para algunas sustancias. Así por ejemplo, en el caso del agua, $E_\theta \cong 22000$ bar.

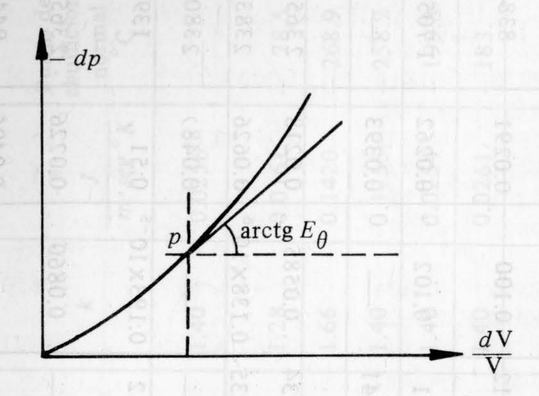


Figura 1.13.

En ciertos procesos físicos muy comunes, como la propagación del sonido ya mencionada, los cambios de presión y los cambios de densidad que los acompañan, se producen de manera tan rápida que el calor generado no tiene tiempo de propagarse. Entonces la temperatura de la sustancia *varía* localmente, de manera que no se tiene un proceso isotermo, sino uno *adiabático*, esto es, sin transmisión del calor. Resulta conveniente definir un *coeficiente de compresibilidad adiabático* según

$$K_q = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_q, \tag{1-39}$$

y asímismo

$$E_q = \rho\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_q. \tag{1-40}$$

Tabla 1.1 Propiedades físicas de algunos líquidos (a 20°C y 1 atm. = 1.013 bar)

	ρ $\frac{kg}{m^3}$	* $\frac{\rho}{\rho_0}$	$\mu \times 10^4$ $\frac{kg}{m \cdot seg}$	$E\times10^{-4}$ bar	p_v bar	σ $\frac{N}{m}$	c_p $\frac{J}{kg\ °K}$	$\tilde{k}$ $\frac{J}{m \cdot seg\ °K}$	β $\frac{1}{°K}$
Benceno C_6H_6	880	0.879	6.50	1.12	0.100	0.0291	838.	0.161	1.24
Tetraclorido de carbono CCl_4	1 591	1.595	9.75	1.1	0.102	0.0262	1 705.	0.103	1.24
Aceite de castor	961	0.96	9 850.	1.41	—	0.0393	—	0.133	—
Alcohol etílico C_2H_5OH	790	0.7893	12.	1.34	0.0585	0.0218	2 365.	0.167	1.115
Glicerina $C_3H_5(OH)_3$	1 261	1.260	14 890.	4.35	0.138×10^{-6}	0.0626	2383.	0.287	0.504
Glicol $(CH_2OH)_2$	1 115	1.116	214.2	—	—	0.048	2380.	0.249	0.648
Mercurio Hg	13 600	13.546	15.5	26.2	0.193×10^{-5}	0.51	139.5	8.690	1.82
Alcohol Metílico CH_3OH	795	0.7929	—	—	0.0860	0.0226	2 365.	0.202	1.197
Tetra Brono Metano $(CH\ Br_2)_2$	2 970	2.964	—	—	0.324	0.0495	944.	—	—
Agua H_2O	1 000	0.9982	10.5	2.16	0.0234	0.0728	4181.6	0.597	1.98

$^*\rho_0$ Corresponde al agua a 4°C., $\rho_0 = 999.97\ \frac{kg}{m^3}$

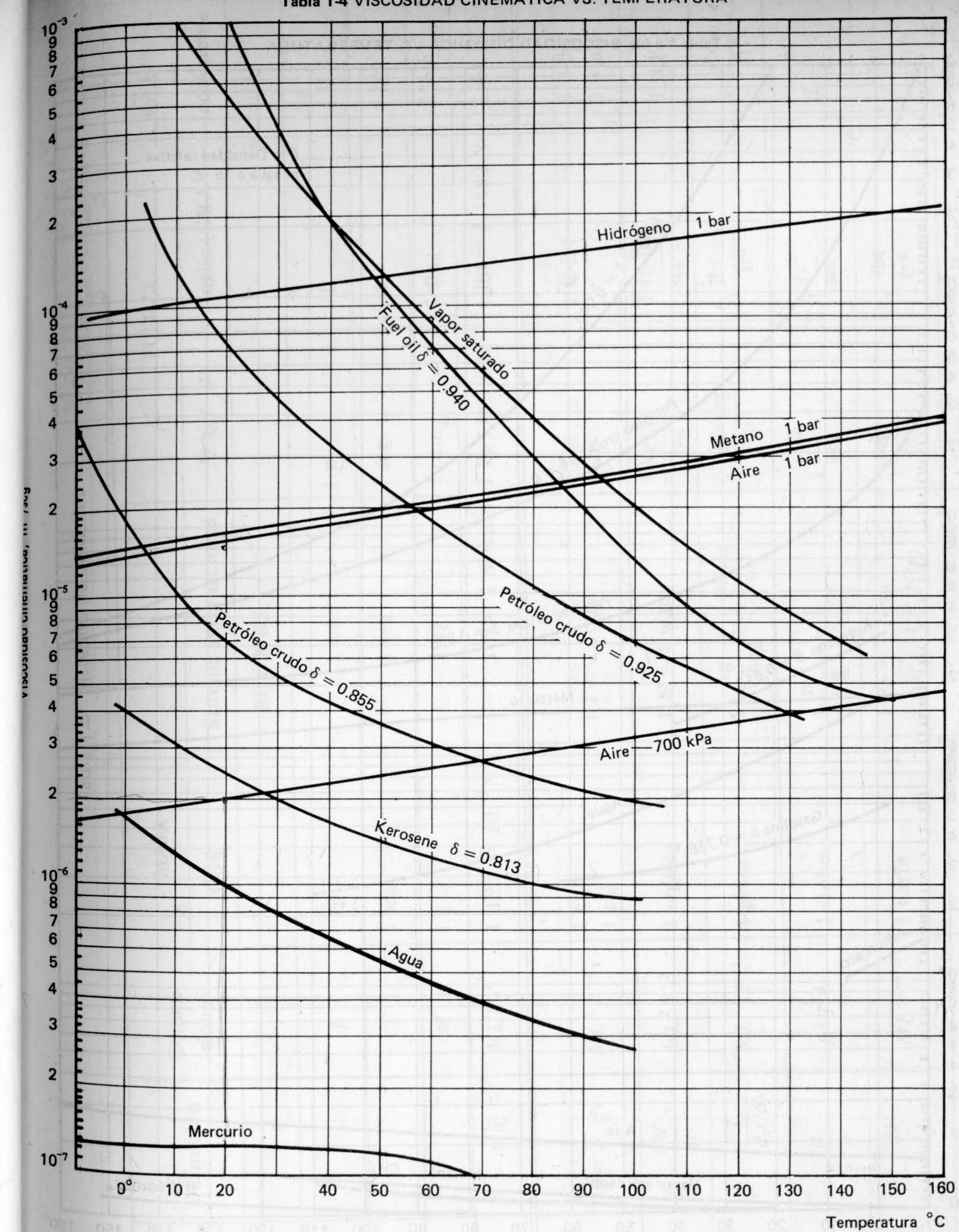
Tabla 1.2 Propiedades físicas de algunos gases a 20°C y 1 atm = 1.013 bar

	ρ $\frac{kg}{m^3}$	M	$\mu \times 10^5$ $\frac{kg}{m\ seg}$	c_p $\frac{J}{kg\ °K}$	k	$\tilde{k}$ $\frac{J}{m \cdot seg\ °K}$	Punto de ebullición normal °C	R $\frac{m^2}{seg^2\ °K}$
AIRE	1.204	28.97	1.804	1008	1.40	0.0256	—	288.0
Bióxido de carbono CO_2	18.41	44.01	1.470	864	1.28	0.0161	– 78.5	
Helio H_e	0.167	4.03	1.965	5200	1.66	0.1420	– 268.9	2077.1
Hidrógeno H_2	0.0836	2.016	0.885	14380	1.40	0.1755	– 258.2	4124.4
Nitrógeno N_2	1.168	23.016	1.804	1080	1.40	0.0254	– 195.8	296.8
Oxígeno O_2	1.33	32.00	2.01	916	1.40	0.0261	– 183.	259.8
Metano CH_4								518.3
Amoniaco NH_3								488.2

Tabla 1.3 Propiedades del agua

θ °C	ρ Kg/dm^3	c_p $KJ/kg\,°k$	μ $kg/m\ seg$	ν m^2/seg
0	0.99984	4.2174	1.750×10^{-3}	1.751×10^{-6}
5	0.99996	4.2019		
10	0.99970	4.1919	1.300×10^{-3}	1.301×10^{-6}
15	0.99910	4.1855		
20	0.99820	4.1816	1.000×10^{-3}	1.005×10^{-6}
25	0.99705	4.1793		
30	0.99565	4.1782	0.797×10^{-3}	0.802×10^{-6}
35	0.99403	4.1779		
40	0.99221	4.1783	0.651×10^{-3}	0.656×10^{-6}
45	0.99022	4.1792		
50	0.98805	4.1804	0.544×10^{-3}	0.550×10^{-6}
55	0.98570	4.1821		
60	0.98321	4.1841	0.463×10^{-3}	0.471×10^{-6}
65	0.98057	4.1865		
70	0.97778	4.1893	0.400×10^{-3}	0.409×10^{-6}
75	0.97486	4.1925		
80	0.97180	4.1961	0.351×10^{-3}	0.361×10^{-6}
85	0.96862	4.2002		
90	0.96532	4.2048	0.311×10^{-3}	0.322×10^{-6}
95	0.96189	4.2100		
100	0.95835	4.2156	0.012×10^{-3}	

Tabla 1-4 VISCOSIDAD CINEMATICA VS. TEMPERATURA



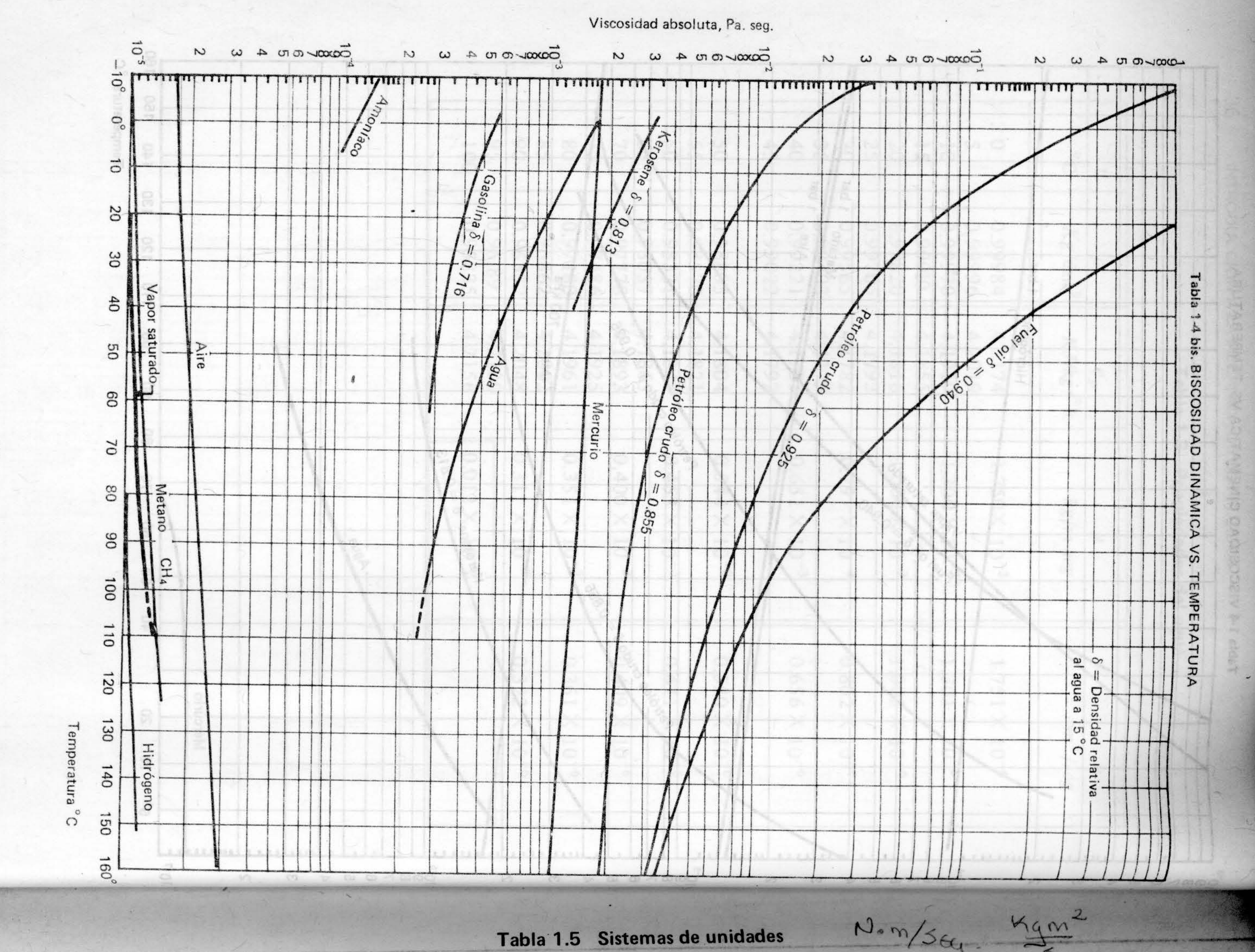


Tabla 1.5 Sistemas de unidades

Magnitudes	Definición	Dimensiones	MASA: CGS	MASA: Sistema Internacional SI ó MKS	FUERZA: M kgf S	FUERZA: Inglés (GRAV.)	INGLES: Incoherente
Longitud		L	1 cm	1 cm	1 m	1 ft	1 ft
Tiempo		T	1 seg	1 seg	1 seg	1 sec	1 sec
Masa		M	1 g	1 kg	1 utm	1 slug	1 lbm
Fuerza	$\overline{F} = m\,\overline{a}.$	MLT^{-2}	1 dina = 10^{-5} N	1 N = 1 newton	1 kg f = 9.8 N	1 lbf = 4.4482 N	1 lbf
Energía Trabajo Calor	$W = \overline{F}.\,d\overline{r}$	ML^2T^{-2}	1 erg 1 cal	1 J = 1 Joule	1 kgf . m 1 cal	1 ft-lbf	1 ft-lbf 1 Btu
Potencia	$P = \frac{dW}{dt}$	ML^2T^{-3}	1 erg/seg	1 W = 1 watt	$\frac{1\text{ kgf.m}}{\text{seg}}$	$\frac{1\text{ ft. lbf}}{\text{sec}}$	1.H.P.
Viscosidad	$\mu = \frac{\tau}{du/dy}$	$ML^{-1}T^{-1}$	1 poise	$1\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{seg}} = 1\frac{\text{N seg}}{\text{m}^2}$	$1\frac{\text{kgf}\cdot\text{seg}}{\text{m}^2}$	$1\frac{\text{lbf sec}}{\text{ft}^2}$	$1\frac{\text{lbf}\cdot\text{sec}}{\text{ft}^2}$
Viscosidad cinemática	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	L^2T^{-1}	1 stoke	$1\frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$	$1\frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$	$1\frac{\text{ft}^2}{\text{sec}}$	$1\frac{\text{ft}^2}{\text{sec}}$
Presión	$p = \frac{dF}{dA}$	$ML^{-1}T^{-2}$	1 baría	1 Pa = 1 N/m² * 1 bar = 10^5 N/m²	$1\frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}$	$1\frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2}$	$1\frac{\text{lbf}}{\text{m}^2}$
Temperatura		θ	1 kelvin	1 kelvin	1 kelvin	1°Rankine	1°Rankine

* 1 Pa = 1 pascal

1.9 Coeficiente de dilatación

Otra característica de una sustancia que se puede obtener de la ecuación de estado, (1-34) es saber cómo varía el volumen con la temperatura cuando se mantiene la presión constante, esto es

$$\beta = \frac{\frac{dV}{V}}{d\theta}$$

y con más precisión,

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)_p,$$

donde β es el llamado coeficiente de dilatación térmica. En el caso de un gas perfecto

$$\beta = \frac{1}{\theta},$$

como se puede ver fácilmente.

Si no se conoce la expresión analítica de la ecuación de estado, el coeficiente β se ha de determinar experimentalmente. (Tabla 1).

1.10 Presión de vapor de un líquido

Como se dijo, las sustancias puras pasan todas ellas por las cuatro fases: sólida, líquida, gaseosa y plasma, según las condiciones de temperatura y presión a que estén sometidas. Considerando el paso de líquido a gas, como ocurre en las condiciones más o menos ambientales para muchas sustancias, en particular el agua, es sabido que a cada temperatura θ_o existe una presión p_v a la cual el líquido empieza a hervir. Así en el agua, si $\theta_o = 100°$ C la presión p_v es la atmosférica: $p_v \cong 1$ bar, pero si $\theta_o = 20°$C la presión p_v es $p_v = 0.0234$ bar. Esta presión a la cual empieza la ebullición se llama *presión de vapor*. Tiene importancia en mecánica de los fluidos porque en aquellas zonas del fluido donde debido al movimiento la presión p baja por debajo de p_v, se producen burbujas de vapor, las cuales al desaparecer instantáneamente cuando la presión se recupera, producen el llamado fenómeno de *cavitación* que será estudiado más adelante.[7]

---

[7] E.Schmidt, *Properties of Water and Steam in SI units*, Springer-Verlag,1.969.

Tabla 1.6 Factores de conversión

Longitud

1 pie = 12 pulgadas = 30.48 cm.; 1 pulgada = 2.54 cm

Masa

1 lb_m = 453.59 g; 1 utm = 9.8 kg

1 slug = 32.2 lb_m

Fuerza

1 kgf = 2.206 lbf, 1 daN = 10 Newtons

Energía, trabajo y calor

1 cal = 4.182 J ; 1 Cal = 10^3 cal

1 Btu = 1.05506 kJ = 778.26 pie-lb_f

1 kg_f-m = 9.8 J; 1 erg = 10^{-7} J

Potencia

1 HP = 0.74567 Kw = 550 lb_f-pie/sec

1 CV = 0.735 Kw = 75 kgf-m/seg

Viscosidad

1 N seg/m^2 = 1 kg/m seg = 10 poise.; 1 kgf seg/m^2 = 98 poise

Presión

1 bar = 10^5 Pa = 100 KPa

1 atm = 1.013 bar = 14 lbf/in^2 = 1.033 kgf/cm^2

Temperaturas

$\theta_K = \theta_c + 273.15$ $\theta_F = \frac{9}{5}\theta_c + 32$

$\theta_R = \theta_F + 459.67$

Ejercicios

1. Un recipiente contiene 10 lts. de agua a 20°C. ¿Cuál es su masa, su peso? . ¿Si está lleno de aire?

Respuesta: 10 Kg.; 98 *N*; 0.01204 Kg; 0.118 *N*.

2. Mismas preguntas que en el problema anterior, suponiendo el recipiente en la Luna, donde $g = 1.66$ m/seg^2.

Respuesta: 10 kg; 16.6 *N*; 0.01204 kg; 0.02 *N*.

3. Una polea que tiene un diámetro interior de 50 mm, gira sobre un *eje* a 400 rpm, con un huelgo radial de 0.075 mm. Calcular el par que, por metro de longitud del eje, se necesita para vencer la resistencia debida al aceite, cuya viscosidad es $\mu = 1.0$ poises, situado dentro del agujero. ¿Cuál es la potencia disipada por la fricción viscosa?

Respuesta: Par 5.5 *N-m*, Potencia 231 W

4. Un fluido tiene un peso específico relativo de 0.85 y una viscosidad cinemática de 0.005 stokes. Calcular su viscosidad dinámica y cinemática en el sistema *MKS*.

Respuesta: $\nu = 5 \times 10^{-7}$ m^2/seg; $\mu = 4{,}25 \times 10^{-4}$ kg/m. seg.

5. Un gas tiene un peso específico relativo de 0.001, (referido al agua). ¿Cuáles son su densidad, peso específico y volumen específico?

Respuesta: 1 kg/m^3 ; 9.8 N/m^3 ; 1 m^3/kg.

6. Un tanque contiene 3 kg de metano a 25°C y 15 bar de presión. ¿Cuál es su volumen?

Respuesta: 0,310 m^3

7. ¿A qué presión puede ser almacenado el anhídrido carbónico a 30°C de manera que se enfríe hasta –40°C cuando se expansiona adiabáticamente hasta la presión de 1 bar?

Respuesta: $p = p_0 \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{k/_{k-1}} = 3.68$ bar

8. Un depósito de acero, cerrado, que se supone rígido, tiene un volumen de 5 m^3 ¿Cuántos kilogramos de agua puede contener el tanque a 150 bar? . Supóngase

$E_\theta = 21000$ bar. ¿Cuánto sería el trabajo que habría que realizar para comprimir esa agua?

Respuesta: 5026.55 Kg, 2.66 J

9. Entre dos placas paralelas como las indicadas hay un fluido de viscosidad μ. La placa superior se mueve con una velocidad constante U_0. Haciendo un análisis de las fuerzas que actúan sobre un elemento del fluido, encontrar la distribución de velocidades en el fluido y el valor del esfuerzo cortante que actúa sobre cada placa.

Respuesta $u = \frac{U_0}{h}y$; $\tau = \mu\frac{U_0}{h}$.

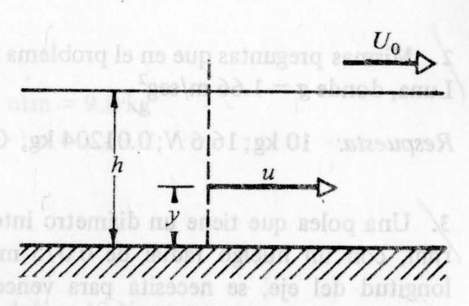


Figura 1.14.

10. El espacio entre dos placas paralelas separadas una distancia h está lleno de un líquido en el cual, debido a las diferencias de temperatura, la viscosidad μ *varía* linealmente desde un valor μ_0 en la placa inferior hasta el valor $\mu_0/2$ en la placa superior. Esta placa superior se mueve con una velocidad U_0. Calcular la relación entre el esfuerzo cortante en el seno del fluido en estas condiciones y el esfuerzo cortante en el caso en que la viscosidad es constante, $\mu = \mu_0$, en el seno del fluido.

Respuesta: 0.722

Figura 1.15.

11. Para ciertas condiciones de flujo la velocidad en el eje de una tubería es dada por

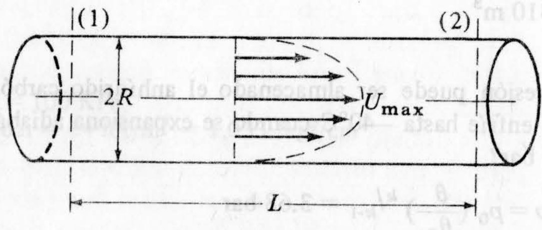


Figura 1.16.

$$U_{max} = \frac{1}{4\mu}\frac{p_1 - p_2}{L}R^2.$$

donde p_1 y p_2 son las presiones en dos secciones del tubo, R el radio, L la distancia entre las dos secciones. Si un aceite de viscosidad 110 centipoises circula por la tubería y $L = 30$ m, $R = 7.5$ cm y $p_1 - p_2 = 0.8$ bar, se pregunta cuánto vale U_{max}. Repetir los cálculos con petróleo de densidad relativa 0.86 y de viscosidad cinemática.

$$\upsilon = 1\ \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}}.$$

12. La fuerza de arrastre que sufre una esfera que cae en el seno de un líquido con una velocidad U es dada por por la fórmula de Stokes

$$F_D = \frac{3\pi\rho\ U^2D^2}{R_e}$$

donde $R_e = UD/\nu$ se llama el número de Reynolds y D es el diámetro de la esfera. Calcúlese la fuerza de arrastre F_D sobre una esfera de diámetro $D = 2$ cm. que cae en una aceite de densidad relativa 0.9 y de viscosidad cinemática 0.3 cm^2/seg, si el número de Reynolds es 0.5.

13. El espacio comprendido entre dos láminas grandes y paralelas está lleno de un líquido de viscosidad absoluta 7 poises. Dentro de este espacio está colocada una lámina de espesor despreciable y de dimensiones 30×30 cm^2 colocada paralelamente a las grandes láminas y a 0.5 cm de una de ellas. Esta lámina es arrastrada con una velocidad de 15 cm/seg. Suponiendo una distribución de velocidades exactamente lineal, encontrar la fuerza con que el líquido frena el movimiento de la lámina.

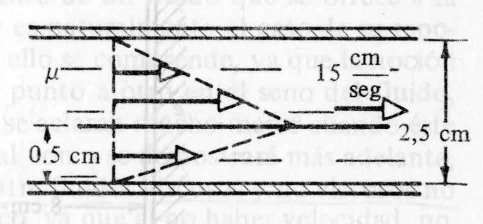


Figura 1.17.

Respuesta: 2,36 *N.*

14. Demostrar que en un proceso adiabático, esto es, donde $d\,q = 0$, la presión y la densidad de un gas perfecto están ligadas por la relación

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const.}$$

¿Qué relación existe entre la presión y la temperatura y entre la densidad y la temperatura en las mismas condiciones?

15. Mostrar que el módulo de compresibilidad se puede definir mediante

$$dp = E_\theta \frac{d\rho}{\rho}.$$

16. Calcular el módulo de compresibilidad E isotermo y el adiabático para un gas perfecto.

Respuesta: $E_{is} = p$; $E_a = kp$.

17. Un litro de agua se somete a una presión de 100 bar. Calcular su cambio relativo de volumen.

Respuesta: 4.55×10^{-3}.

18. Un cuerpo cilíndrico rota a una velocidad angular constante de 15 rad/seg. Una película de aceite de castor separa el cilindro del recipiente que lo contiene. La temperatura promedio del aceite es de 20°C y el espesor de la película de 2×10^{-3} cm. ¿Qué par se requiere para mantener el movimiento del cilindro a la velocidad indicada? (Se supondrá que la velocidad en el aceite varía proporcionalmente a la distancia al eje de rotación, como en un cuerpo rígido.)

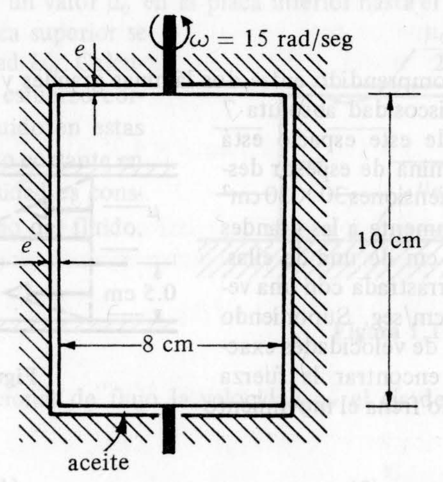


Figura 1.18.

Respuesta:

19. Comprobar que el coeficiente de dilatación de un gas ideal es inversamente proporcional a su temperatura absoluta.

20. Determinar las dimensiones de la conductividad térmica $\widetilde{k}$ y sus unidades en el sistema internacional.

Respuesta: $MLT^{-2}\ \Theta$

CAPITULO 2

Estática de los fluidos

2.1 Introducción

EL PRIMER aspecto de la mecánica de un fluido que se ofrece a la consideración de un investigador es naturalmente el caso de su reposo. Así ocurrió históricamente y ello se comprende, ya que la noción de presión y su variación de un punto a otro en el seno del fluido, son conceptos fundamenales que se aclaran mucho mejor cuando éste está en equilibrio. Finalmente, tal como se demostrará más adelante, la distinción un tanto artificial entre fluidos viscosos y no viscosos no se hace necesaria en el caso estático, ya que al no haber velocidad, no existen esfuerzos cortantes en el seno de un fluido. Las leyes aquí obtenidas tienen pues un carácter totalmente general para un fluido en reposo.

2.2 Presión en un punto

En un fluido cualquiera en reposo no existen, como se acaba de decir, esfuerzos tangenciales (o cortantes). Así pues, si por un punto P del fluido se pasa una superficie cualquiera y se toma sobre ella un elemento de área dA, la fuerza $d\overline{F}$ que actúa sobre dA tiene la dirección de la normal a la superficie. Se define entonces la presión como el *esfuerzo normal*

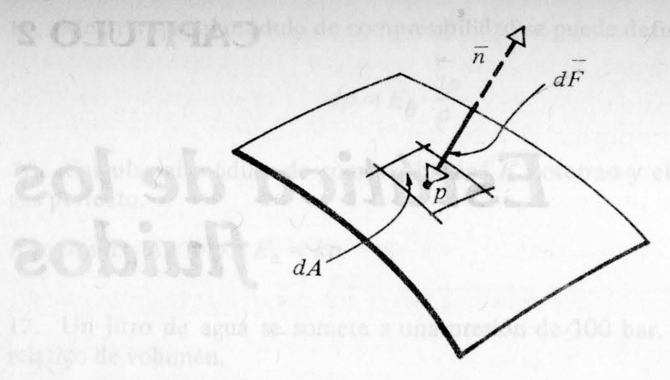


Figura 2.1.

$$p_n = \frac{dF}{dA}$$

donde el índice n indica provisionalmente la dirección considerada.

De esta definición *se deduce* que la presión p_n no depende en realidad de $\bar{n}$ y que puede dejar de escribirse el subíndice. Este resultado es llamado *teorema de Pascal* y se demuestra fácilmente como sigue:

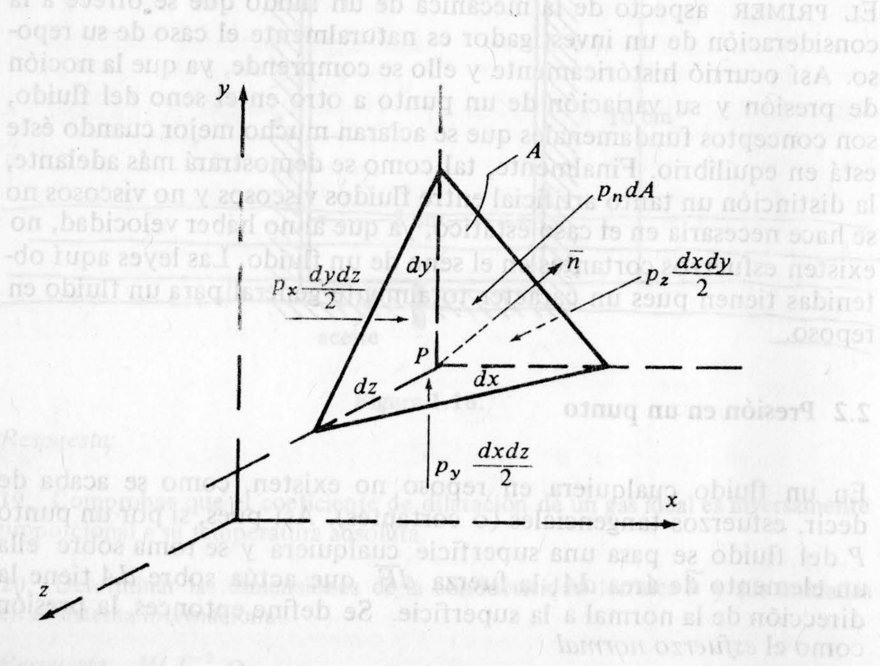


Figura 2.2.

Supóngase un fluido en reposo y tómese un elemento de volumen en un punto p cualquiera. El elemento de volumen se define por cuatro planos: tres de ellos paralelos a los de coordenadas y el otro cualquiera, con una normal $\bar{n}$ y de área dA. En los planos paralelos de coordenadas que pasan por P, las áreas de las caras son las proyecciones de dA, y dicha proyección de dA sobre ellos es

$$dA \cos\alpha = \frac{1}{2}\, dy\, dz,$$

$$dA \cos\beta = \frac{1}{2}\, dx\, dz,$$

$$dA \cos\alpha = \frac{1}{2}\, dx\, dy,$$

donde α, β, γ son los cosenos directores de $\bar{n}$.

Escribiendo la ley de Newton para el elemento así definido, se tiene, puesto que hay equilibrio,

$$\frac{1}{2} p_x\, dy\, dz - p_n\, dA \cos\alpha = 0$$

$$\frac{1}{2} p_y\, dx\, dz - p_n\, dA \cos\beta - \frac{1}{6} \rho g\, dx\, dy\, dz = 0.$$

$$\frac{1}{2} p_z\, dx\, dy - p_n\, dA \cos\gamma = 0.$$

Dividiendo ahora por $\frac{1}{2}\, dy\, dz$, etc., y haciendo que dx, dy, dz tiendan a cero, se obtiene

$$p_x = p_n \;, \quad p_y = p_n \;, \quad p_z = p_n \;.$$

Como se ve, el valor de la presión sobre un elemento de superficie no depende de su orientación. Por consigueinte se puede escribir la definición de presión sin especificar la dirección n:

$$p = \frac{dF}{dA} \tag{2-1}$$

La presión es pues, una magnitud escalar, única para cada punto en el seno del fluido. Ahora bien esa magnitud escalar puede variar de un punto a otro, es decir la presión es una función escalar de punto.

$$p = p(x, y, z). \tag{2-2}$$

Es de notar también que si el fluido está en movimiento, y después que se haya generalizado convenientemente el concepto de presión, la presión podrá depender del tiempo, esto es, en un punto fijo la presión podrá ir variando a medida que el tiempo transcurre

$$p = p\,(x, y, z, t). \tag{2-3}$$

2.3 Distribución de presiones en un fluido en reposo

Se ha visto, (2-2), que la presión puede variar en el seno de un fluido en reposo. Cabe pues estudiar de qué factores depende y cómo varía la función

$$p = p\,(x, y, z).$$

Para ello, trácese en el seno de un fluido en reposo una superficie cerrada A *cualquiera* que encierra un volumen V. Considérense las fuerzas que actúan sobre el volumen del fluido encerrado por A. En la superficie actúan las fuerzas de presión. Si n es la normal exterior a dicha superficie, la totalidad de dichas fuerzas se expresa por

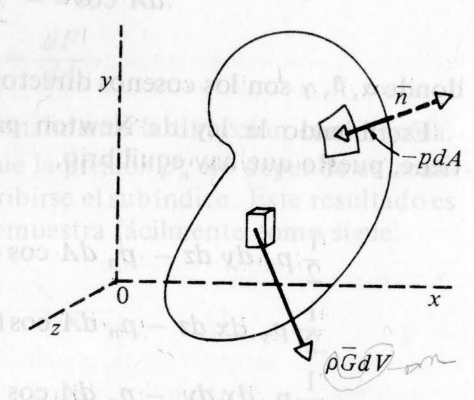


Figura 2.3.

$$-\int_{(A)} p\,\overline{n}\,d\,A$$

Por otra parte los elementos de volumen dV dentro de la superficie considerada están sometidos a las fuerzas de gravedad, o a cualquier otra fuerza inercial que puediera actuar. Si $\rho\,dV$ es la unidad de masa y G la aceleración de estas fuerzas de volumen (gravedad u otras), la fuerza total por este concepto es

$$\int_{(V)} \rho\,\overline{G}\,dV$$

Ya que el fluido está en equilibrio, se puede pues escribir

$$-\int_{(A)} p\,\overline{n}\,dA + \int_{(V)} \rho\,G\,dV = 0$$

esto es, aplicando el llamado teorema del gradiente, se puede transformar la integral de superficie en una de volumen y se tiene

$$-\int_{(V)} \nabla p\,dV + \int_{(V)} \rho\,G\,dV = 0$$

esto es

$$\int_{(V)} (-\nabla p + \rho\,\overline{G})\,dV = 0. \tag{2-4}$$

Como la superficie A se tomó cualquiera, para que esta condición se cumpla, se ha de tener también

$$\boxed{\nabla p = \rho\,\overline{G}} \tag{2-5}$$

Esta ecuación es la llamada *ecuación fundamental de la estática de los fluidos*. Su interpretación física es fácil: indica cómo y por qué varía la pesión en un fluido en reposo. Esta variación, medida por el gradiante es igual a la fuerza de gravedad $\rho\overline{G}$ (o de otras fuerzas inerciales presentes) a las que el fluido está sometido.

Ejemplo 1: *Variación de la presión en un fluido de densidad constante bajo la acción de la gravedad.*

Se tomarán unos ejes de coordenadas, con uno de ellos paralelo a la gravedad, o sea vertical.

Entonces $G = -g\,j$ y la ecuación (2-5) se escribe, proyectántola sobre los tres ejes de coordenadas

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g;\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{2-6}$$

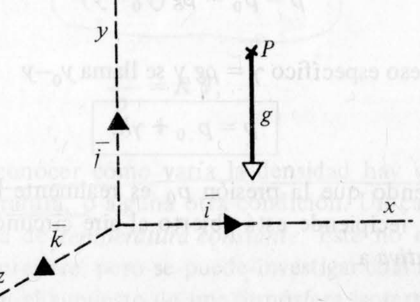


Figura 2.4.



Estas ecuaciones permiten llegar a varias conclusiones, incluso antes de hacer uso de la hipótesis particular de ρ = const. En efecto, la primera y la última ecuación permiten afirmar que p es únicamente función de y y que la presión permanece constante sobre un mismo plano horizontal.

Luego:

$$p = p(y)$$

y la segunda de las (2-6) se escribe

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g, \tag{2-7}$$

cuya integración arroja, haciendo ahora p = const.,

$$p = -\rho g y + C \tag{2-8}$$

Este tipo de constantes donde C es una constante de integración. Se determina mediante las condiciones de contorno del problema dado. Así por ejemplo, sea un tanque de agua de profundidad y_0.

Con los ejes tal como se indican, calcular la presión en un punto de altura y. En la superficie libre, la presión es la constante p_0, (la presión atmosférica por ejemplo). Entonces la condición de contorno es: para $y = y_0, p = p_0$. Llevando estos valors en (2-8), se tiene

$$p_0 = \rho g y_0 + C$$

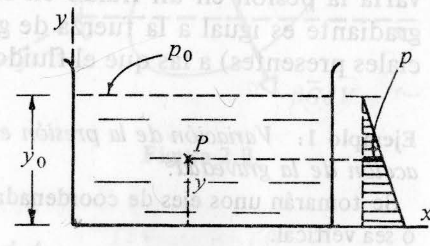


Figura 2.5.

Restando entre ésta y la (2-8) ahora, se obtiene la presión en el punto P.

$$p \;\; p_0 = \rho g (y_0 - y) \tag{2-9}$$

Si se introduce el peso específico $\gamma = \rho g$ y se llama $y_0 - y$ la *profundidad*, se tiene

$$p = p_0 + \gamma h. \tag{2-10}$$

Por fin, suponiendo que la presión p_0 es realmente la atmosférica, esto es, suponiendo que el recipiende está abierto al aire circundante, se llama *presión manométrica* o *relativa* a

$$p_m = p - p_0, \tag{2-11}$$

en cuyo caso la ecuación (2-10) se escribe también

$$p_m = \gamma h \tag{2-12}$$

Es de observar que la presión manométrica tiene un significado físico y técnico importante: Es el valor que tiene en un punto la presión, *por encima* de la atmosférica.

En oposición a p_m la presión p se llama a veces *presión absoluta* o *total*. La presión manométrica tiene este nombre porque es la presión que se obtiene directamente con el instrumento de medidas llamado *manómetro*.

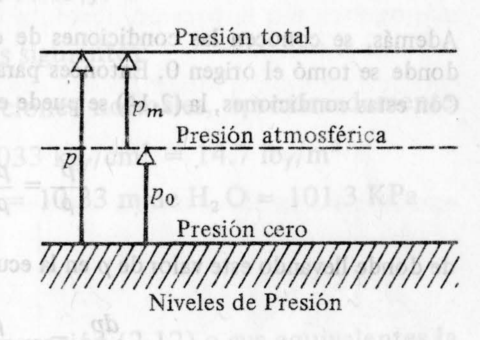


Figura 2.6.

Podría hacerse una última observación diciendo que las fórmulas (2-9) y (2-10) pueden presentar apariencias distintas si se toma el origen en otra parte, la superficie libre por ejemplo. Sin embargo, el sentido físico expresado por (2-12) es el mismo. Se deja como ejercicio el establecer estas otras expresiones.

Ejemplo 2: Distribución de presión en una atmósfera isoterma.

En la atmósfera la densidad del aire no es constante, ya que éste es notablemente compresible. Suponiendo que se trata de un gas ideal, su *ecuación de estado es*, (1-30)

$$\frac{p}{\rho} = R\,\theta, \tag{2-13}$$

de manera que para conocer cómo varía la densidad hay que dar también la variación de la temperatura, o alguna otra condición. Un caso sencillo es el de suponer una atmósfera de *temperatura constante.* Este no es, por supuesto, el caso de la atmósfera terrestre, pero se puede investigar cuál sería la distribución vertical de presiones en el supuesto de una atmósfera isoterma. Si θ = const.se tiene naturalmente, de (2-13), la ley de Boyle-Mariotte:

$$\frac{p}{\rho} = \text{const.} \qquad (2\text{-}14)$$

Partiendo pues de (2-6) se tiene que también $p = p(y)$ o sea

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \qquad (2\text{-}15)$$

pero, en este caso, ρ no es constante.

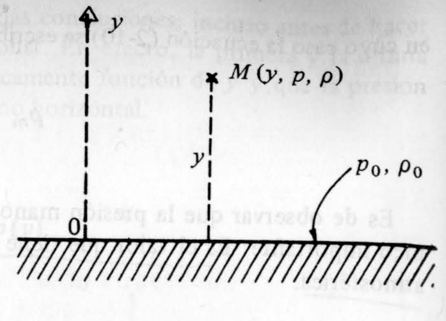


Figura 2.7.

Además, se conocen las condiciones de contorno en la superficie de la tierra donde se tomó el origen 0. Entonces para $y = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, por ejemplo. Con estas condiciones, la (2-14) se puede escribir

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0},$$

de donde llevando este valor de ρ en la ecuación diferencial (2-15),

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, dy.$$

Ahora se puede integrar, obteniéndose

$$\ln p = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, y + C.$$

Aplicando aquí las condiciones de contorno para $y = 0$,

$$\ln p_0 = C,$$

de donde

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, y,$$

y finalmente la distribución de presión

$$p = p_0\, e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} y} \qquad (2\text{-}16)$$

Es de observar que en una atmósfera isoterma como ésta, es necesario que la altura se haga infinita para que la presión se anule. Evidentemente, no es el caso de la atmósfera terrestre.

2.4 Unidades de presión

En el sistema técnico, la unidad natural sería el kgf/m^2, pero por ser una unidad muy pequeña se usa el kgf/cm^2; con, naturalmente $1\ kgf/cm^2 = 10^4\ Kgf/m^2$.

En el sistema internacional *MKS*, por razones análogas, se define

$$1\ \text{bar} = 10^5\ N/m^2 = 100\ \text{KPa}.$$

El kilopascal es usado también como unidad de presión.

En el sistema inglés la unidad de presión usual es

$$1\ lbf/\text{in}^2 = 144\ lb/ft^2.$$

Algunas relaciones útiles son las siguientes:

Presión atmosférica, en condiciones normales, aproximadamente

$$p_{atm} = 1.013\ \text{bar} = 1.033\ kg_f/cm^2 = 14.7\ ib_f/m^2$$
$$= 760\ \text{mm de Hg} = 10.33\ \text{m de } H_2O = 101.3\ \text{KPa}$$

2.5 Piezómetros y manómetros

Una aplicación importante de la ecuación (2-12) o sus equivalentes la constituyen los aparatos de medición llamados piezómetros.

Un piezómetro simple consiste de un tubo curvado, conectado en uno de sus extremos al recinto en el cual se quiere medir la presión y su otro extremo, generalmente vertical, dejado al aire libre donde reina la presión atmosférica, por ejemplo. El tubo se llena entonces de un líquido distinto de fluido contenido en el recipiente cuya presión se quiere medir. Así por ejemplo, si C contiene aire, el líquido en el piezómetro contiene agua. En estas condiciones, el cálculo de la presión en el nivel AB se puede llevar a cabo considerando la columna del líquido en el piezómetro entre B y D. Entonces, de (2-12) se deduce que

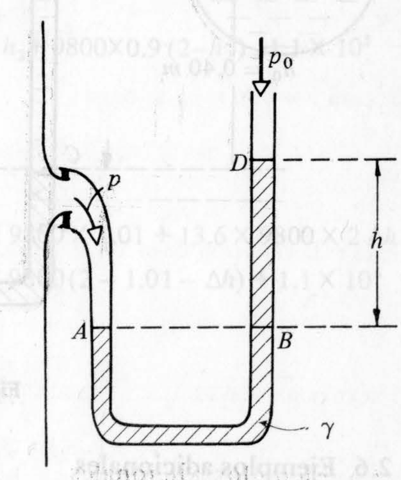


Figura 2.8.

$$p = p_0 + \gamma\, h, \qquad (2\text{-}17)$$

obteniéndose así la *presión absoluta*, o

$$p_m = p - p_0 = \gamma\, h, \tag{2-18}$$

que da la presión manométrica dentro del recinto.

La forma y complicación de los piezómetros puede naturalmente ser mayor. Para establecer la ecuación que los rige, se aplicará siempre la ecuación (2-12) recordando que todos los puntos a un mismo nivel en el seno de un mismo líquido tienen igual presión.

Existen otros aparatos llamados manómetros que miden la presión manométrica o la presión absoluta después de haber sido calibrados experimentalmente.

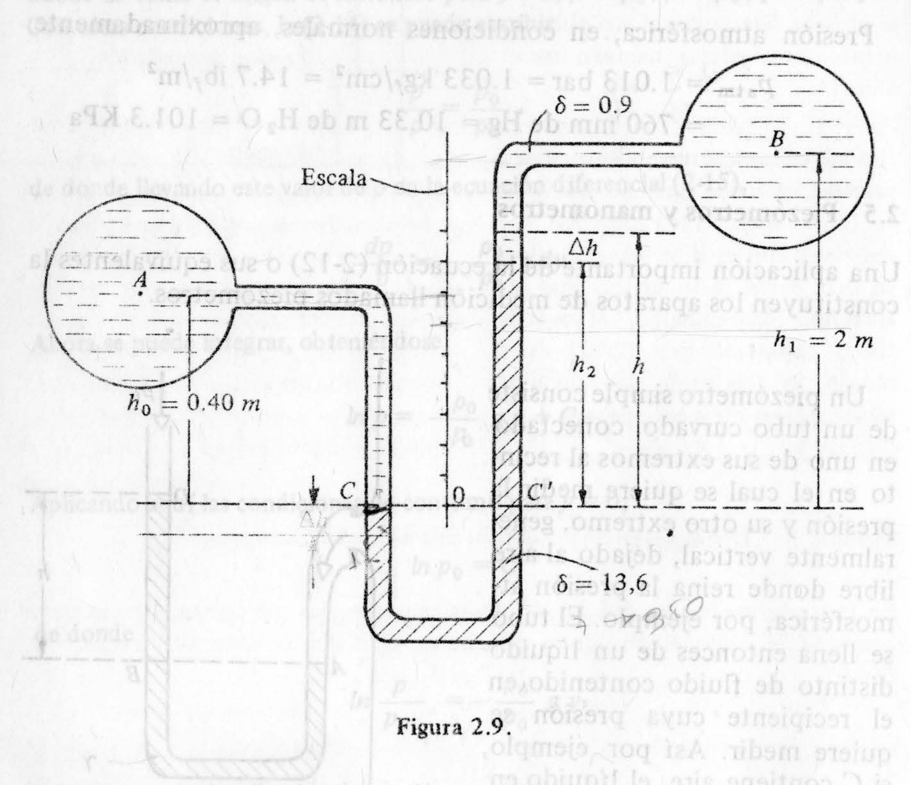


Figura 2.9.

2.6 Ejemplos adicionales

Ejemplo 3:

Dos tuberías que conducen aceite de peso específico relativo $\delta = 0.9$ están conectadas por un piezómetro, tal como se indica. La presión en el tubo B es constante $p_B = 1.1$ bar.

Cuando $p_A = p_0 = 2{,}5$ bar, el menisco de la izquierda coincide con el cero de la escala. Calcular la altura del menisco de la derecha cuando la presión en A sube a $p_1 = 3$ bar, sin que se modifique la escala.

Se escribirá la ecuación del equilibrio de los fluidos, en este caso $p = p_0 + \gamma h$; tomando como referencia el nivel CC', para los dos casos planteados.

1er. caso: La presión en A es p_0. Entonces

(a) $$p_0 + \gamma_0 h_0 = \gamma_m h_2 + \gamma_0 (h_1 - h_2) + p_B$$

De esta ecuación se puede despejar el valor de h_2

2do. caso: En este caso, si Δh es lo que baja el menisco por la rama izquierda

(b) $$p_1 + \gamma_0 (h_0 + \Delta h) = \gamma_m (h_2 + 2\,\Delta h) + \gamma_0 (h_1 - h_2 - \Delta h) + p_B$$

Conocido h_2, de esta ecuación se despeja Δh. La altura del menisco en la escala es entonces

$$h = h_2 + \Delta h$$

Aplicación numérica: La ecuación (a) se escribe

$$2.5\times 10^5 + 9800\times 0.9\times 0.4 = 9800\times 13.6\, h_2 + 9800\times 0.9\,(2 - h_2) + 1.1\times 10^5$$

de donde $h_2 = 1.01$ m.

De la ecuación (b) se obtiene entonces

$$3\times 10^5 + 9800\times 0.9\,(0.4 + \Delta h) = 13.6\times 9800\times 1.01 + 13.6\times 9800\times 2\,\Delta h + 0.9\times 9800\,(2 - 1.01 - \Delta h) + 1.1\times 10^5$$

de donde $\Delta h = 0.64$ m.

Luego, $h = 1{,}65$ m

Ejemplo 4: Líquido compresible

Se trata de calcular la presión p en el seno de un líquido a una profundidad tal que ya no se lo puede considerar incompresible, esto es, tomando en cuenta que la densidad es variable, y la temperatura constante.

Para poder integrar la ecuación fundamental en su forma (2-7)

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g,$$

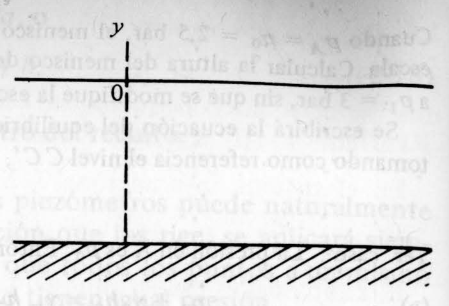


Figura 2.10.

hace falta conocer cómo depende la densidad de la presión. Si el líquido es compresible, se tiene (1-38)

$$dp = -E_\theta \frac{dV}{V} = E_\theta \frac{d\rho}{\rho},$$

donde se supondrá a E_θ constante. Entonces, integrando, $p = E_\theta ln\rho + C$ y haciendo $\rho = \rho_0$ cuando $p = p_0$, se tiene

$$p - p_0 = E_\theta \; ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Sabido esto, se encuentra la variación de ρ con la profundiad al sustituir dp en la ecuación del equilibrio

$$E_\theta \frac{d\rho}{\rho} = -\rho g \, dy,$$

de donde, integrando,

$$\frac{E_\theta}{\rho g} + C_1 = y,$$

Si para $y = 0$, $\rho = \rho_0$ se tiene

$$y = \frac{E_\theta}{g} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right).$$

Esta es la variación de ρ con la densidad que se escribe también

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{E_\theta}{E_\theta + \rho_0 gy}.$$

Luego la presión es

$$p = p_0 + E_\theta \, ln \frac{E_\theta}{E_\theta + \rho_0 gy}.$$

Ejemplo 5: Atmósfera adiabática

Sea una masa de aiere en la cual no hubiera conducción del calor, en reposo. La ecuación de la estática de los fluidos (2-7)

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g$$

puede entonces ser utilizada, recordando que la relación presión-densidad es del tipo

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}.$$

En efecto se tiene entonces

y
P
$\rho = \rho_0, p = p_0$
0
x

Figura 2.11.

$$\rho = p^{1/k} \frac{\rho_0}{p_0^{1/k}}$$

y por consiguiente

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{\rho_0 g}{p_0^{1/k}} p^{1/k} = -\frac{\gamma_0}{p_0^{1/k}} p^{1/k}.$$

Separando variables e integrando se obtiene

$$\frac{p^{1-\frac{1}{k}}}{1-\frac{1}{k}} = -\frac{\gamma_0}{p_0^{1/k}} y + C$$

Escribiendo que para $z = 0$, $p = p_0$, el valor de C resulta ser

$$C = \frac{k}{k-1} p_0^{1-\frac{1}{k}},$$

de donde

$$p^{\frac{k-1}{k}} - p_0^{\frac{k-1}{k}} = -\frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{p_0^{1/k}} y,$$

y finalmente

$$\frac{p}{p_0} = \left[1 - \frac{k-1}{k} \frac{\rho_0 g}{p_0} y\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Esta ley da pues, la presión p en una atmósfera adiabática en función de la altura y y de las condiciones de la superficie $y = 0$. La presión es una función

decreciente de y y se anula para una cierta altura máxima $y_{\text{máx}}$ fácilmente calculable. Se cumple en efecto $p = 0$ para

$$y_{\text{máx}} = \frac{k}{k-1}\,\frac{p_0}{\gamma_0}$$

Se trata pues, de una atmósfera de altitud finita.

2.7 Fuerzas sobre superficies planas sumergidas

Sobre una superficie sumergida actúa una presión en cada punto. Esta presión da lugar a una fuerza que es fácil determinar.

En el caso en que la superficie sea plana, los vectores fuerza

$$d\bar{F} = -p\,d\bar{A}\,, \qquad (2\text{-}19)$$

tienen todos la misma dirección, a saber la normal a la superficie. La resultante tiene pues esa dirección común. Será suficiente determinar su magnitud y su recta de acción.

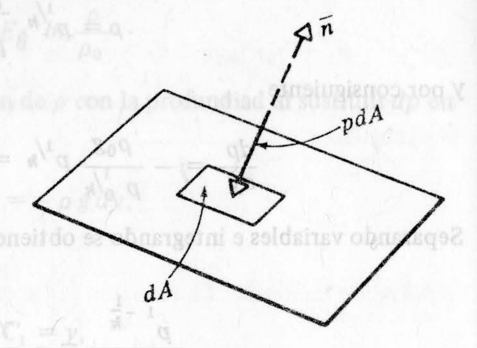


Figura 2.12.

Sea entonces una superficie plana, también indicada en vista de frente, y que forma un ángulo θ con la superficie de un líquido.

La fuerza elemental dF_z que actúa sobre un elemento de área, paralelamente al eje z es dada por

$$dF_z = p\,dA = \gamma\,h\,dA = \gamma y \ \text{sen}\,\theta\,dA,$$

donde el significado de los símbolos está dado en la figura.

Se quiere determinar la magnitud de la resultante y su punto de aplicación P. La resultante es dada por

$$F_z = \int_{(A)} p\,dA = \gamma\ \text{sen}\,\theta \int_{(A)} y\,dA. \qquad (2\text{-}20)$$

Recordando que las coordenadas del centroide de un área plana son, en las notaciones presentes

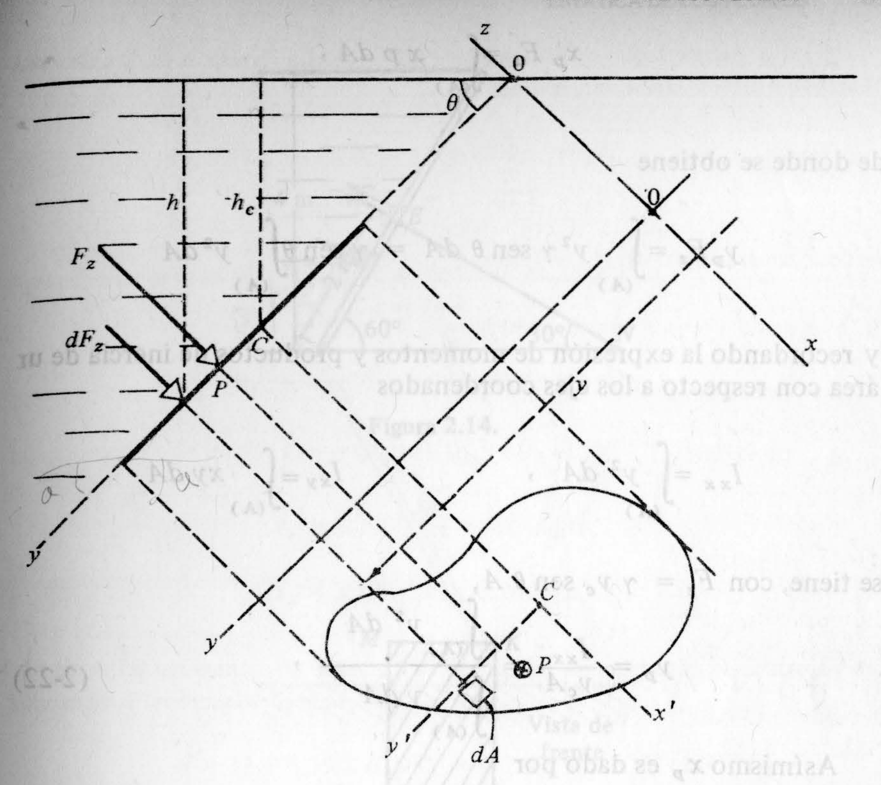


Figura 2.13.

$$x_c = \frac{1}{A}\int_{(A)} x\,dA\,, \qquad y_c = \frac{1}{A}\int_{(A)} y\,dA$$

se tiene

$$F_z = \gamma\ \text{sen}\,\theta\ A\ y_c$$
$$= \gamma\ h_c\ A = p_c A\,. \qquad (2\text{-}21)$$

Se ve pues que la fuerza de presión es dada, en magnitud, por la presión en el centroide multiplicada por el área considerada.

Para saber el punto de aplicación, que se llamará *centro de presión* P, basta con tomar momentos del sistema de fuerzas de presión con respecto a dos ejes cualesquiera.

Se tiene así:

$$y_p\ F_z = \int_{(A)} y\ p\ dA\,,$$

$$x_p\ F_z = \int_{(A)} x\ p\ dA\ ,$$

de donde se obtiene

$$y_p F_z = \int_{(A)} y^2 \gamma \text{ sen } \theta\ dA\ = \ \gamma \text{ sen } \theta \int_{(A)} y^2 dA$$

y recordando la expresión de momentos y productos de inercia de un área con respecto a los ejes coordenados

$$I_{xx} = \int_{(A)} y^2\ dA\ , \qquad I_{xy} = \int_{(A)} xy\ dA$$

se tiene, con $F_z\ =\ \gamma\ y_c \text{ sen } \theta\ A$,

$$y_p = \frac{I_{xx}}{y_c A} = \frac{\int_{(A)} y^2\ dA}{\int_{(A)} y\ dA}\ , \qquad (2\text{-}22)$$

Asímismo x_p es dado por

$$x_p = \frac{I_{xy}}{y_c\ A} = \frac{\int_{(A)} xydA}{\int_{(A)} y\ dA}\ . \qquad (2\text{-}23)$$

Es fácil demostrar que estas fórmulas se escriben también

$$y_p = y_c + \frac{I_{x'x'}}{A\ y_c}\ ;\ x_p = x_c + \frac{I_{x'y'}}{y_c A} \qquad (2\text{-}24)$$

La fórmula (2-21) que da la fuerza y las (2-22) y (2-23) que ubican su punto de aplicación son suficientes, en principio, para resolver todos los problemas relacionados con pantallas planas.

Ejemplo:

La posición y la forma de la pantalla de un dique se indican en la figura adjunta. Sabiendo que su líquido es agua y que su nivel alcanza el borde superior de la pantalla, se pide determinar la fuerza de compresión que actúa sobre la barra de soporte *EN*.

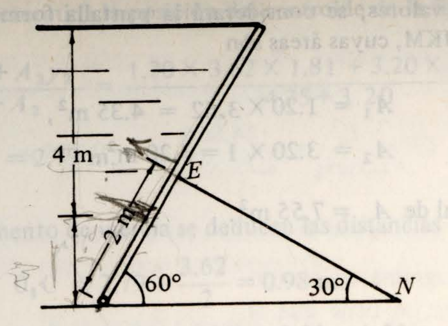


Figura 2.14.

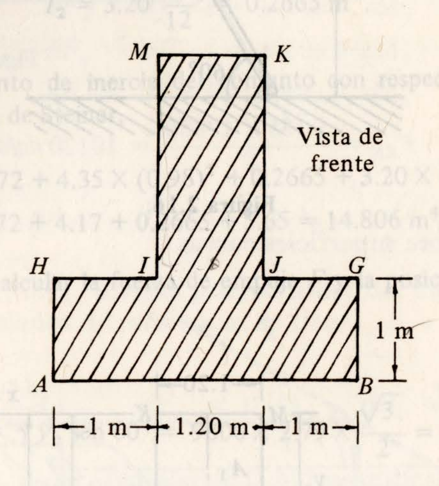


Figura 2.15.

Determinemos primero las características geométricas de la pantalla. Dado que la profunidad es de 4 m, se concluye que

$$L = \frac{4}{\text{sen } 60^\circ} = 4.62 \text{ m}.$$

Para los demás valores, se considerará la pantalla formada de los dos rectángulos ABHG y IJKM, cuyas áreas son

$$A_1 = 1.20 \times 3.62 = 4.35 \text{ m}^2,$$
$$A_2 = 3.20 \times 1 = 3.20 \text{ m}^2,$$

es decir un área total de $A = 7.55 \text{ m}^2$.

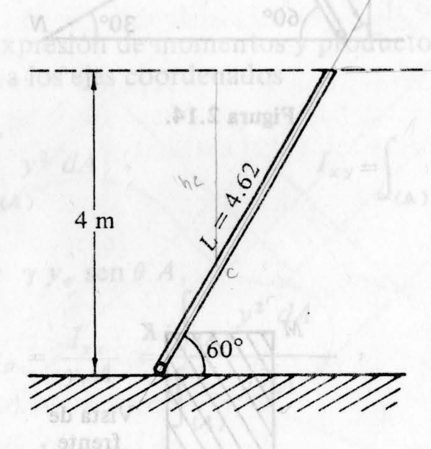


Figura 2.16.

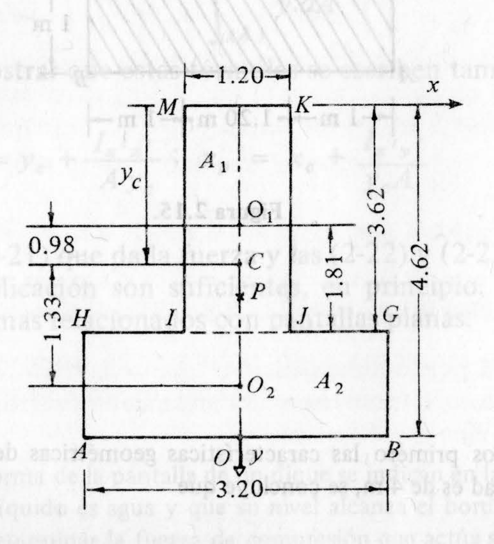


Figura 2.17.

A continuación se determina la posición del centroide de la figura,

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{1.20 \times 3.62 \times 1.81 + 3.20 \times 1 \times 4.12}{4.35 + 3.20} =$$
$$= \frac{21.06}{7.55} = 2.79 \text{ m.}$$

Para calcular el momento de inercia se deducen las distancias

$$0_1C = 2.79 - \frac{3.62}{2} = 0.98 \text{ m.}$$
$$0_2C = (1.81 - 0.98) + 0.50 = 1.33 \text{ m.}$$

Los momentos de inercia con respecto a 0_1 y a 0_2 de cada rectángulo son

$$I_1 = 1.20 \frac{3.62^3}{12} = 4.72 \text{ m}^4,$$
$$I_2 = 3.20 \frac{1}{12} = 0.2665 \text{ m}^4.$$

Luego, el momento de inercia del conjunto con respecto al centroide es, aplicando el teorema de Steiner,

$$I_c = 4.72 + 4.35 \times (0.98)^2 + 0.2665 + 3.20 \times (1.33)^2$$
$$= 4.72 + 4.17 + 0.2665 + 5.65 = 14.806 \text{ m}^4.$$

Ahora se puede calcular la fuerza de empuje F y la posición de su punto de aplicación P.

Fuerza:

$$p_c = \gamma h_c = \gamma y_c \text{ sen } 60° = 9800 \times 2.79 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\,3610 \frac{N}{m^2}$$

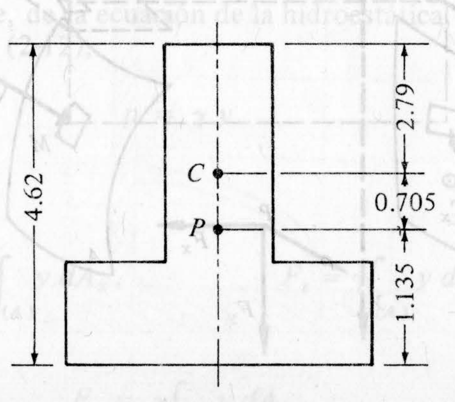


Figura 2.18.

$$F = p_c A = 23610 \times 7.55 = 178500\ N = 17850 \text{ daN}$$

Punto de aplicación

$$CP = \frac{I_c}{y_c A} = \frac{14.806}{2.79 \times 7.55} = 0.705 \text{ m.}$$

Haciendo un diagrama de cuerpo libre de la pantalla, se tiene que el brazo de la fuerza buscada es

$$OP = 1.135 \text{ m.}$$

Luego la compresión de la barra tiene por magnitud

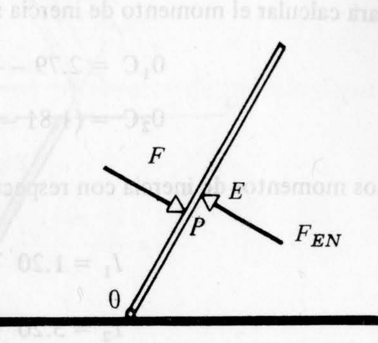


Figura 2.19.

$$F_{EN} = \frac{1.135 \times 17850}{2} = 10120\ daN$$

2.8 Fuerzas sobre superficies curvas

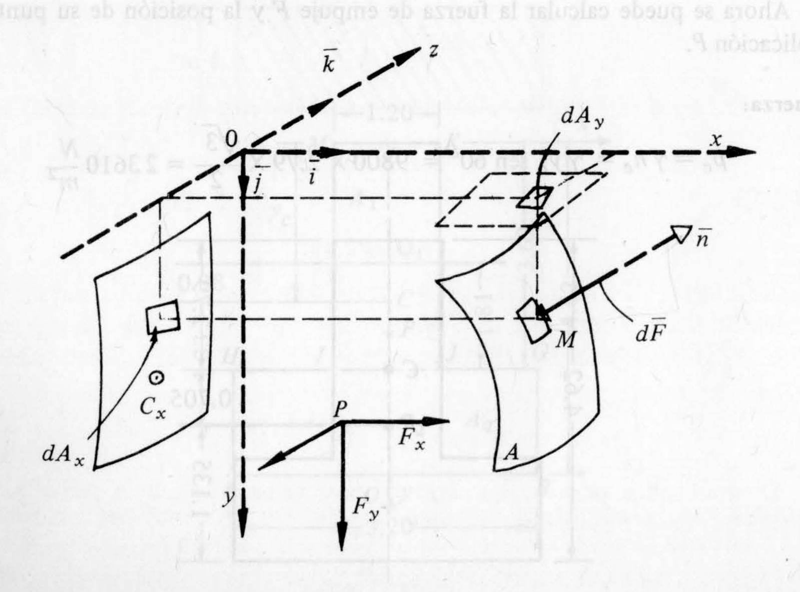


Figura 2.20.

Para determinar las fuerzas que actúan sobre una superficie curva sumergida en un líquido, es necesario tomar en cuenta el carácter vectorial de la fuerza elemental de presión

$$d\bar{F} = -p\, d\bar{A} = -p\, \bar{n}\, dA.$$

donde $\bar{n}$ es el vector normal unitario a la superficie en el punto considerado. Este vector tiene por componentes

$$\bar{n} = \cos\alpha\, \bar{i} + \cos\beta\, \bar{j} + \cos\gamma\, \bar{k},$$

en un sistema de ejes como el indicado, con el plano $O\,x\,z$ en la *superficie libre.*

La igualdad vectorial anterior se puede pues escribir

$$dF_x = d\bar{F} \cdot \bar{i} = p \cos\alpha\ dA,$$
$$dF_y = d\bar{F} \cdot \bar{j} = p \cos\beta\ dA,$$
$$dF_z = d\bar{F} \cdot \bar{k} = p \cos\gamma\ dA,$$

y observando que

$$dA \cos\alpha = dA_x, \quad dA \cos\beta = dA_y, \quad dA \cos\gamma = dA_z,$$

donde dA_x, dA_y, dA_z, son las proyecciones del elemento dA sobre cada uno de los planos de referencia, se tiene

$$dF_x = p\, dA_x, \quad dF_y = p\, dA_y, \quad dF_z = p\, dA_z.$$

Por otra parte, de la ecuación de la hidroestática, la presión manométrica en M es, (2-12),

$$p = \gamma y.$$

Luego

$$F_x = \gamma \int_{(A)} y\, dA_x, \qquad F_z = \gamma \int_{(A)} y\, dA_z \qquad (2\text{-}25)$$

$$F_y = \gamma \int_{(A)} y\, dA_y, \qquad (2\text{-}26)$$

Las dos primeras ecuaciones dan las *componentes horizontales* de la fuerza F. Se las puede interpretar igual que en el caso de una superficie plana, esto es:

La componente horizontal de las fuerzas de presión que actúan sobre una superficie, en una dirección dada, es igual al área de la proyección de la superficie sobre un plano perpendicular a esa dirección, por la presión existente en el centroide de dicha proyección.

En efecto, para completar la demostración basta escribir

$$F_x = \gamma \int y \, dA_x = \gamma \; y_{cx} \; A_x \, , \qquad (2\text{-}27)$$

$$F_z = \gamma \int y \, dA_z = \gamma \, y_{cz} \, A_z \, . \qquad (2\text{-}28)$$

La *componente vertical* F_y es dada por (2-26). La integral que aparece en esta ecuación representa el volumen del fluido comprendido entre la superficie libre y la superficie dada. Por consiguiente:

La componente vertical de las fuerzas de presión es igual al peso del volumen del prisma de líquido encerrado entre la superficie libre y la superficie dada.

En cuanto a las *rectas de acción* según las cuales actúan estas componentes de puede razonar de la siguiente manera:

Para las componentes horizontales, bastará determinar el centro de presión de la *proyección* de la superficie dada sobre el plano normal correspondiente.

Para la componente vertical se buscará la recta de acción de la *resultante* de las fuerzas de peso del volumen encerrado entre la superficie libre y la superficie considerada.

Ejemplo:

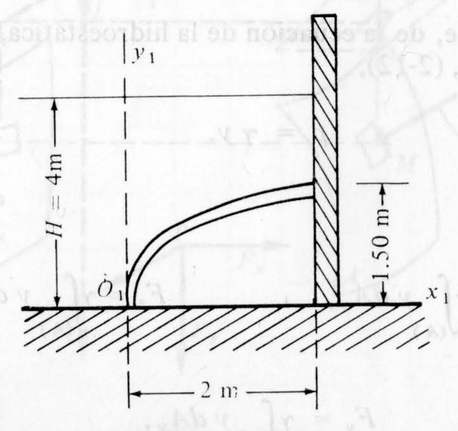


Figura 2.21.

Un conducto de forma parabólica está cubierto por una capa de agua de 4m, tal como se indica en la figura. Se piden las dos componentes de la fuerza que actúa sobre la superficie exterior del conducto por unidad de longitud y sus rectas de acción. Se determinará también la fuerza resultante y el punto de la superficie sobre el cual actuaría.

Ecuación de la forma de la pantalla

$$x_1 = a \, y_1^2$$

El coeficiente se determina mediante la condición $x_1 = 2, \; y_1 = 1.5$

Luego

$$x_1 = 0{,}89 \; y_1^2$$

o bien

$$y_1 = 1.06 \; \sqrt{x_1} \; .$$

Componente horizontal del empuje. La proyección de la superficie parabólica sobre el plano vertical es la pantalla AB

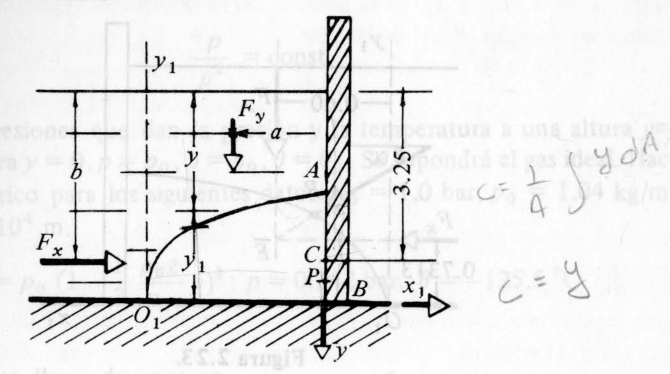


Figura 2.22.

Magnitud de F_x:

$$F_x = \rho g \; OC \times AB = 9800 \times 3.25 \times 1.50$$

$$= 47800 \frac{N}{m}$$

Centro de presión:

$$CP = \frac{1.5^3}{12 \times 3.25 \times 1.5 \times 1} = 0.01875 \text{ m.}$$

Luego,

$$b = 3.25 + 0.0187 = 3.2687 \text{ m}$$

Componente vertical del empuje:

$$F_y = \rho g \int y\, dA = \rho g \times 1 \times \int y\, dx = \rho g \int_0^2 (H - y_1)\, dx_1$$

$$= 9800 \int_0^2 (4 - 1.06\sqrt{x_1})\, dx_1 = 9800 \times 5.179 = 50800\ \frac{N}{m}.$$

Tomando momentos en 0

$$a\, F_y = \rho g \int_0^2 (2 - x_1)\, y\, dA_y = \rho g \int_0^2 (2 - x_1)(4 - 1.06\sqrt{x_1})\, dx_1$$

$$= \rho g \int_0^2 (8 - 2.12\, x^{1/2} - 4x + 1.06\, x^{3/2})\, dx = 7.264\, \rho g$$

Luego

$$a = \frac{7.264}{5.179} = 1.4 \text{ m.}$$

Punto de aplicación de la resultante sobre la pantalla:

Se referirán los brazos de las componentes al sistema $Ox_1\, y_1$

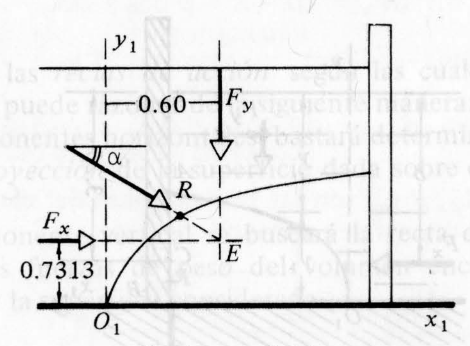


Figura 2.23.

Se ve entonces que esas componentes concurren en el punto E de coordenadas $x_1 = 0{,}60$ m, $y_1 = 0.7313$ m. La recta de acción de F pasa por este punto y tiene por pendiente

$$tg\ \alpha = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{5080}{4780} = -1.061,$$

luego su ecuación es

$$y_1 - 0.7313 = -1.061\,(x_1 - 0.60).$$

La intersección de esta recta con la parábola

$$y_1 = 1.06\ \sqrt{x_1}\ ,$$

da el punto de aplicación R buscado.

Ejercicios

1. Un recipiente de gas está conectado al aire mediante un tubo largo y curvado. Determine la presión en el recipiente utilizando los datos indicados.

$$\gamma_{Hg} = 13.6\ \gamma_{H_2O}$$

$$\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Respuesta: $p_m = 41.1$ bar

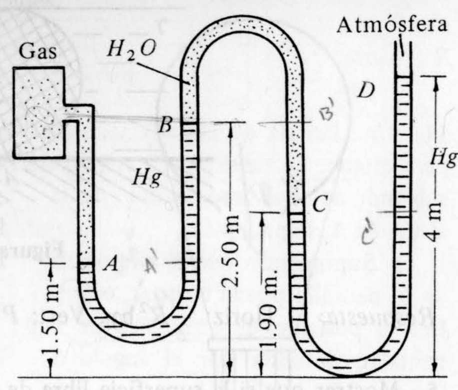


Figura 2.24.

2. Dada una atmósfera en reposo, en la cual la relación entre densidad y presión se puede expresar mediante

$$\frac{p}{\rho^2} = \text{const.}$$

deducir las expresiones que dan la presión y la temperatura a una altura $y = h$, sabiendo que para $y = 0, p = p_0, \rho = \rho_0, \theta = \theta_0$. Se supondrá el gas ideal. Hacer el cálculo numérico para los siguientes datos: $p_0 = 1.0$ bar, $p_0 = 1.04$ kg/m³. $\theta_0 = 20°$C, $h = 10^4$ m.

Respuesta: $p = p_0\,(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho_0 g}{p_0}\,y)^2$; $p = 0.242$ bar, $\theta = -125.5$ °C

3. Un recipiente lleno de agua comunica en la manera indicada con un depósito elevado. Se pide la resultante de la presión hidroestática sobre el fondo del recipiente cilíndrico. Hacer una figura que incluya, en forma esquemática la distribución de las presiones en las paredes de los recipientes y de los tubos.

Respuesta: 12850 daN

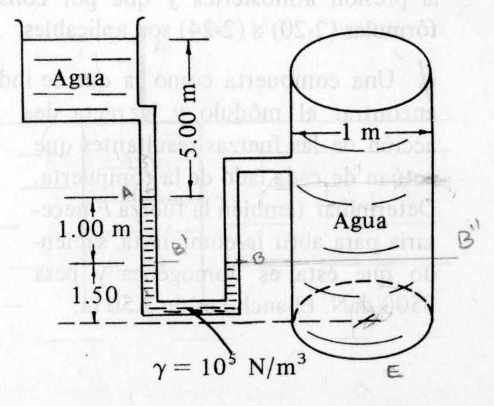


Figura 2.25.

4. Dado un cilindro de peso P y de radio R, como se indica en la figura, calcule las reacciones en el punto A. Peso específico del líquido γ. ¿Cuál es el momento de volcamiento? Se tomará un ancho b

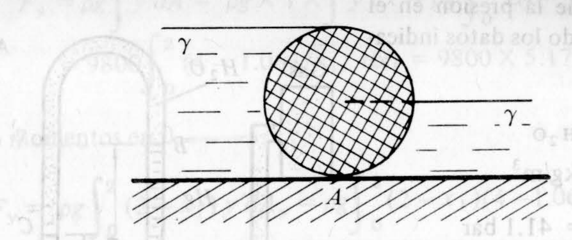


Figura 2.26.

Respuesta: Horiz: $\frac{3}{2}R^2 b\gamma$; Vert: $P - \frac{3}{4}\pi R^2 b\gamma$; M_{Vol}: $\frac{3}{2}R^3 b\gamma$

5. Mostrar que si la superficie libre de un líquido está sometida a una presión manométrica p_0, la fuerza que actúa sobre un área plana sumergida es dada por

$$F_z = p_c A$$

donde A es el área y p_c es la presión en su centroide. Asimismo la posición del centro de presión P es dada por

$$y_p = \frac{p_0 A y_c + \gamma \text{ sen}\,\theta\ I_{xx}}{p_0 A + \gamma \text{ sen}\,\theta\ A y_c}$$

$$x_p = \frac{p_0 A\, x_c + \gamma \text{ sen}\,\theta\ I_{xy}}{p_0 A + \gamma \text{ sen}\,\theta\ A y_c}$$

Demostrar que estos resultados equivalen a considerar que el nivel del líquido tiene una *altura adicional* p_0/γ, donde la nueva superficie libre está sometida a la presión atmosférica y que por consiguiente, con esta altura adicional, las fórmulas (2-20) a (2-24) son aplicables.

6. Una compuerta como la que se indica tiene agua de los dos lados. Se pide encontrar el módulo y la recta de acción de las fuerzas resultantes que actúan de cada lado de la compuerta. Determinar también la fuerza F necesaria para abrir la compuerta, sabiendo que ésta es homogénea y pesa 3500 daN. El ancho es de 2.50 m.

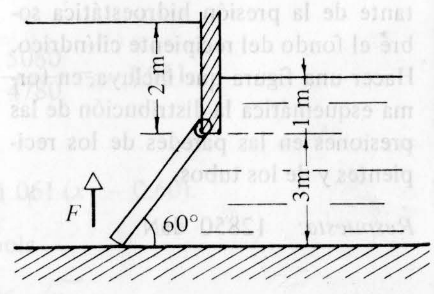


Figura 2.27.

Respuesta: Hacia la derecha 29700 daN; Hacia la izquierda 21200 daN; F = 8450 daN

7. Demostrar el principio de Arquímedes.

8. Un globo esférico de 12 m de diámetro está abierto en su parte inferior y es llenado de hidrógeno. Si la lectura barométrica es 710 mm de Hg. (torr), y la temperatura 20°C, ¿cuál ha de ser el peso total del globo para que se mantenga en equilibrio?

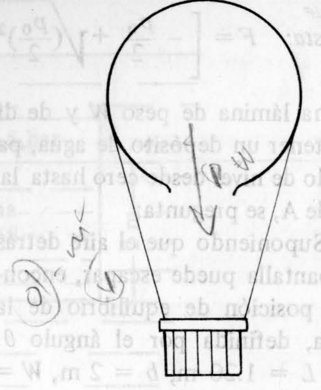


Figura 2.28.

Respuesta: 916 daN.

9. Un cilindro de peso específico γ_c flota en un líquido de peso específico γ de manera que sobresale hasta la mitad. ¿Cuánto vale γ_c ?

Respuesta: $\gamma/2$.

10. Un recipiente cilíndrico abierto en un extremo, flota en un líquido de densidad ρ, con el extremo abierto hacia abajo. El recipiente tiene un peso P y es mantenido por el aire atrapado dentro, como se muestra.

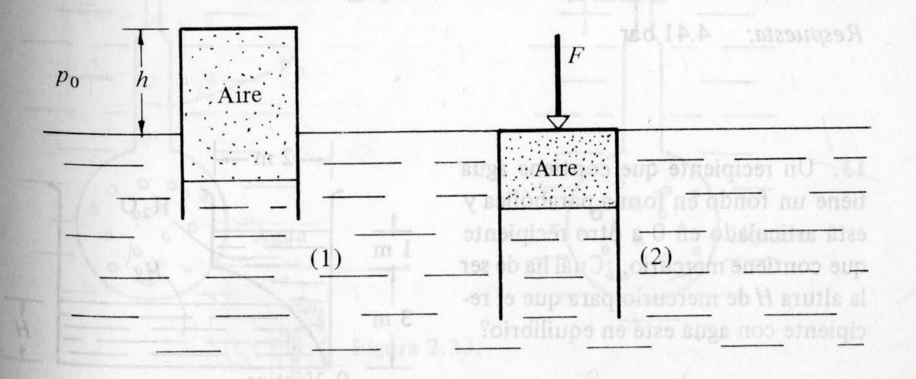


Figura 2.29.

Suponiendo que el aire se comprime a temperatura constante, determínese la fuerza necesaria F para sumergir el recipiente como se indica en la posición (2). La sección normal interna del cilindro es A y el volumen de las paredes del recipiente puede ser despreciado.

Respuesta: $F = \left[-\frac{p_0}{2} + \sqrt{(\frac{p_0}{2})^2 + (\frac{P}{A} + \rho g h)(\frac{P}{A} + p_0) A - P} \right]$

11. Una lámina de peso W y de dimensiones L y b, (ancho) sirve de pantalla para retener un depósito de agua, para lo cual está articulada en A. Si el agua va subiendo de nivel desde cero hasta la altura de A, se pregunta:

a) Suponiendo que el aire detrás de la pantalla puede escapar, encontrar la posición de equilibrio de la pantalla, definida por el ángulo θ. Datos: L = 1.20 m, b = 2 m, W = 1000 daN.

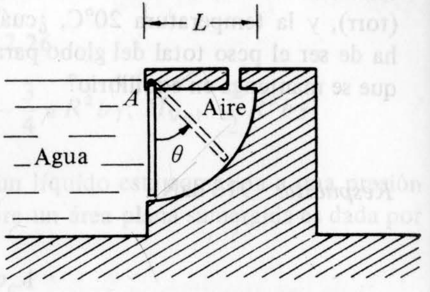


Figura 2.30.

b) Suponiendo que el aire detrás de la pantalla no puede escapar y que es comprimido adiabáticamente, encontrar la posición de equilibrio. Se supondrá que cuando el nivel era cero, el aire encerrado estaba en condiciones normales.

Respuesta: a) $\theta = 62°$

12. Cuál es la presión en un punto a 30 m. de profundidad en un líquido, cuya densidad varía linealmente con la profunidad, según la ley

$$\rho = 1200 + 20\,h,\ \text{kg/m}^3 ?$$

Respuesta: 4.41 bar

13. Un recipiente que contiene agua tiene un fondo en forma parabólica y está articulado en 0 a otro recipiente que contiene mercurio. ¿Cuál ha de ser la altura H de mercurio para que el recipiente con agua esté en equilibrio?

Respuesta: $H \cong 0.99$ m.

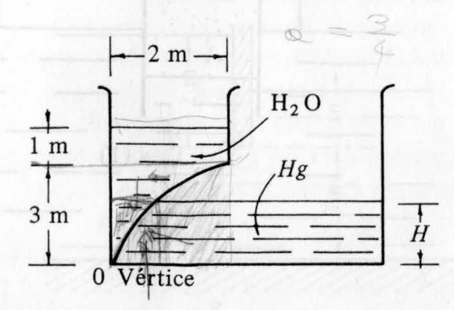


Figura 2.31.

14. Una instalación submarina contiene una cúpula cilíndrica ABCD como se indica en la figura. Tomando en cuenta la acción de los fluidos en presencia, tanto dentro como fuera de la instalación, se pregunta cuál es la fuerza total que actúa sobre la cúpula, y su dirección. (No se tomará en cuenta la compresibilidad del agua).

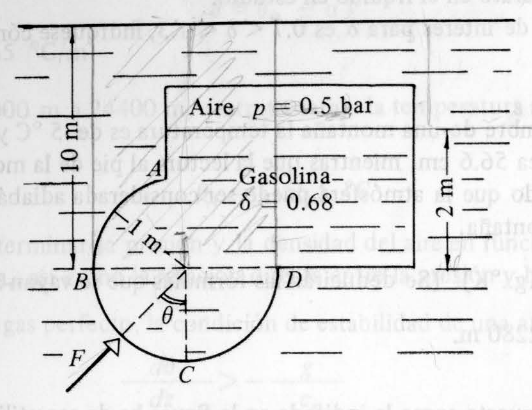


Figura 2.32.

Respuesta: F = 5300daN
$\theta = 38° 10'$.

15. Un hidrómetro es un aparato para medir el peso específico relativo δ de un líquido. Para ello se lo calibra en *agua pura*, marcando 1.0 en su nivel de flotación. El volumen sumergido en esa oportunidad se determina también y se llama

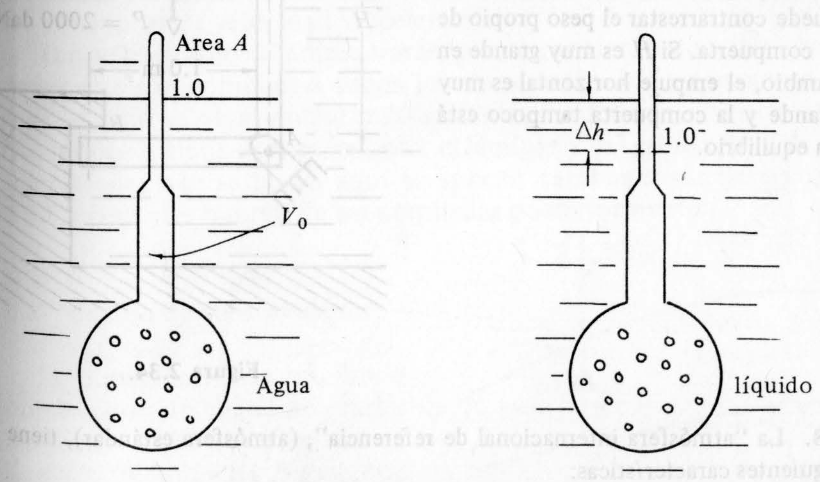


Figura 2.33.

V_0 Si el peso del aparato es W y el área de la sección recta del vástago es constante e igual a A, muéstrese que δ es dado por

$$\delta = \frac{1}{1 + \frac{A}{V_0}\ \Delta h}$$

donde Δh es la distancia adicional que sobresale (o se hunde) del vástago al ser colocado el aparato en el líquido en estudio.

Si el rango de interés para δ es $0.7 < \delta < 1.3$, indíquese cómo se calibraría el hidrómetro.

16. En la cumbre de una montaña la temperatura es de -5 °C y el barómetro de mercurio indica 56.6 cm, mientras que la lectura al pie de la montaña es de 74.9 cm. Suponiendo que la atmósfera puede ser considerada adiabática *determine la altura* de la montaña.

$R = 287\, J\,/\,(\text{Kg.}\ °\text{K})$. (Se deducirán las fórmulas que se vayan a emplear).

Respuesta: 2280 m.

17. Una compuerta como la indicada en la figura ha de ser utilizada para regular el nivel superior de un depósito. El peso de la compuerta es de 2000 daN y su centro de gravedad G está ubicado en la figura. Se pide determinar para qué valores de H la compuerta se mantiene en equilibrio, sabiendo que B es un apoyo simple. Se observará que si H es muy pequeña la presión sobre AB es pequeña y por consiguiente no puede contrarrestar el peso propio de la compuerta. Si H es muy grande en cambio, el empuje horizontal es muy grande y la compuerta tampoco está en equilibrio.

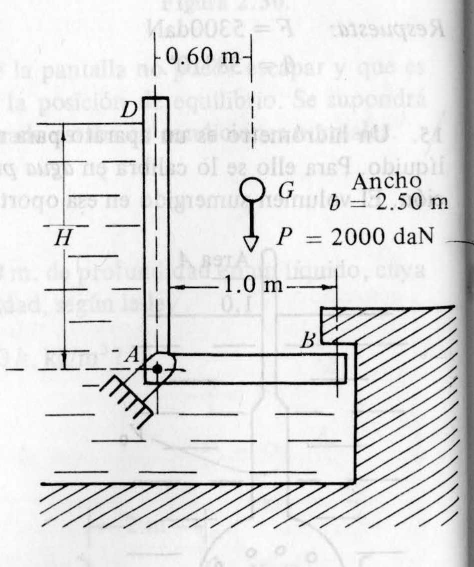


Figura 2.34.

18. La "atmósfera internacional de referencia", (atmósfera estándar), tiene las siguientes características:

a) La presión, la temperatura y la densidad del aire, a altitud cero, son respectivamente

$$p_0 = 1 \text{ atm},\quad \theta_0 = 15°\text{C}\ ,\quad \rho_0 = 1.226 \text{ kg/m}^3$$

Además,

$$R = 287.1\ \ m^2/\text{seg}^2\ °\text{C}$$

b) De 0.0 m a 11000 m de altitud (troposfera), la temperatura disminuye linealmente, según la ley

$$\theta = \theta_0 - \alpha y$$

con $\alpha = 0.0065$ °C/m.

c) De 11000 m a 24400 m, (estratosfera), la temperatura se mantiene constante en

$$\theta_1 = -56.5\ \ °\text{C}$$

Se pide determinar la presión y la densidad del aire en función de la altura y, hasta 24400 m., así como la relación directa entre la presión y la densidad.

d) Para un gas perfecto, la condición de estabilidad de una atmósfera es que*

$$\frac{d\theta}{dz} > -\frac{g}{c_p}$$

Verificar que esta condición se cumple para la atmósfera estándar.

Respuesta:

$$p = 1.033\,(1 - 2.26 \times 10^5 y)^{5.255}\ \text{ bar},$$

$$\rho = 1.226\,(1 - 2.26 \times 10^{-5} y)^{4.255}\ \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

ambos para $y < 11000$ m.

* L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Mecánica de los Fluidos, Reverté.

CAPITULO 3

Cinemática

3.1 Introducción

ESTE CAPITULO pretende estudiar aquellos aspectos del movimiento de los fluidos que no dependen de las causas que lo producen. En pocas palabras, cómo describir el movimiento y cómo introducir los conceptos de velocidad y aceleración.

Ahora bien sólo se considerarán por el momento aquellas propiedades que son comunes a todos los tipos de fluidos, ya sean viscosos o no. Como se verá mucho más adelante, los fluidos viscosos tienen dos modos o tipos de movimiento, el laminar y el turbulento. Las consideraciones que se hacen aquí se aplican a ambos casos, pero para el caso turbulento habrán de ser ampliadas posteriormente.

3.2 Campo de velocidades

El movimiento de un fluido puede ser descrito de varias maneras. Aquí se adoptará el llamado *método de Euler,* que consiste en lo siguiente: En cada punto del espacio, considerado como un *punto fijo P*

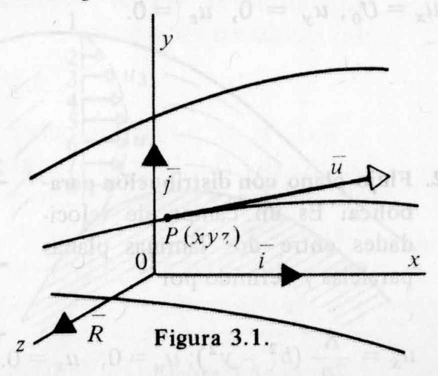


Figura 3.1.

(x, y, z), se observa *en cada instante* la velocidad de aquella partícula que en ese instante pasa por P. Dicha velocidad es un vector que puede ser representado por

$$\overline{u} = u_x \overline{i} + u_y \overline{j} + u_z \overline{k}, \tag{3-1}$$

y estas tres componentes u_x, u_y, u_z dependen de cuál punto se ha escogido, esto es, dependen de x, y, z, y además, en general del tiempo t. Se tiene pues

$$\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{3-2}$$

Se observará que éste es un punto de vista distinto del de la mecánica de la partícula, ya que en dicha disciplina uno se interesa en la posición de cada punto material, de su trayectoria, etc. Adoptar este último punto de vista en mecánica de los fluidos sería seguir el llamado método de Lagrange, el cual por lo general resulta mucho más complicado, por no decir estéril, debido al gran número de "partículas" contenidas en una masa continua de fluido.

El método de Euler parece pues más sencillo: A cada punto del espacio por donde pasa el fluido se le adjunta un vector velocidad, variable con el tiempo. Es la velocidad de la partícula que, en *ese instante*, pasa por el punto. Se tiene pues en realidad un *campo de velocidades.*

Ejemplos

1. **Flujo uniforme:** Se llama así el movimiento de un fluido en el cual la velocidad es la misma en todos los puntos. Un ejemplo sencillo

$$u_x = U_0, \; u_y = 0, \; u_z = 0.$$

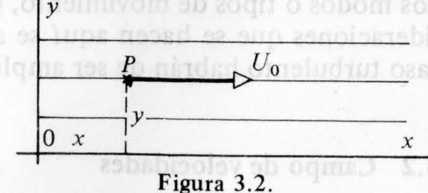
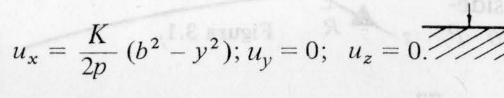


Figura 3.2.

2. **Flujo plano con distribución parabólica:** Es un campo de velocidades entre dos láminas planas paralelas y definido por



$$u_x = \frac{K}{2p}(b^2 - y^2); \; u_y = 0; \; u_z = 0.$$

Figura 3.3.

3. **Flujo alrededor de un cilindro de un fluido no viscoso:** Por métodos que se estudiarán más adelante y despreciando la viscosidad, se obtiene el campo de velocidades de una corriente uniforme cuando se encuentra con el obstáculo de un cilindro circular recto, perpendicular al movimiento.

El campo de velocidades obtenido en estas condiciones es

$$u_x = a^2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u_y = -a^2 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

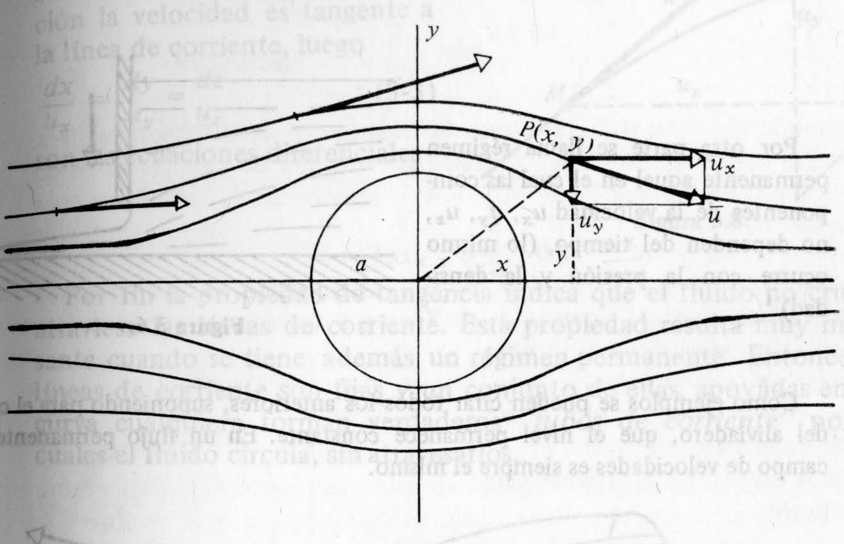


Figura 3.4.

Conviene subrayar que para un fluido real (esto es viscoso), el campo de velocidades de este ejemplo es mucho más complicado y en parte desconocido. Sin embargo el ejemplo ilustra lo que se entiende por campo de velocidades.

4. **Flujo por encima de un aliviadero:** Los ejemplos anteriores daban el campo de velocidades analíticamente. Como se verá en desarrollo de la materia, es muy poco frecuente aquel caso cuando se consideran problemas técnicos de la Ingeniería. El campo de velocidades existe, pero para conocerlo, por lo menos en algunos puntos importantes, hay que recurrir a una u otra forma de experimentación.

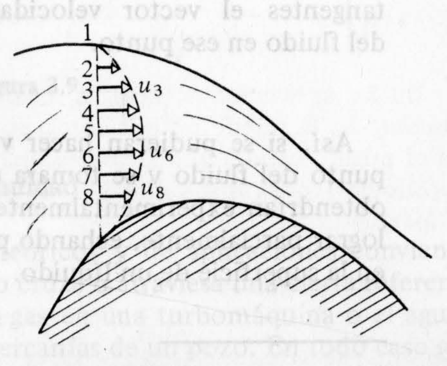


Figura 3.5.

Los resultados pueden entonces indicarse gráficamente, como en el caso del aliviadero indicado en la figura.

Régimen variable y régimen permanente. Volviendo al caso general y tal como se dijo, las componentes u_x, u_y, u_z pueden ser funciones de tiempo,(3-2). Esto es u_x, u_y, u_z cambian, en un mismo punto, de un instante a otro. Se dice que se tiene un régimen, o un flujo *variable.* Tal es el caso durante el cierre de una compuerta o de la llave de una tubería. El movimiento de las olas del mar es también variable.

Por otra parte se llama régimen permanente aquel en el cual las componentes de la velocidad u_x, u_y, u_z, no dependen del tiempo, (lo mismo ocurre con la presión y la densidad) [1]

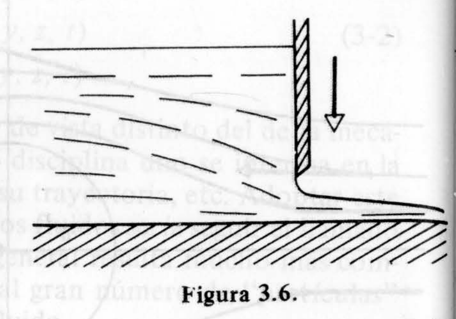


Figura 3.6.

Como ejemplos se pueden citar todos los anteriores, suponiendo para el caso del aliviadero, que el nivel permanece constante. En un flujo permanente el campo de velocidades es siempre el mismo.

3.3 Líneas de corriente

Se llaman líneas de corriente aquellas curvas que se pueden trazar en un instante dado, de manera que en cada punto sean tangentes el vector velocidad del fluido en ese punto.

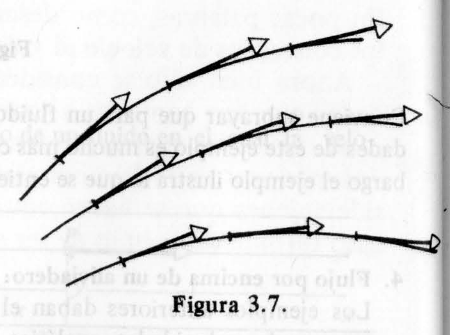


Figura 3.7.

Así, si se pudieran hacer visibles los vectores velocidad en cada punto del fluido y se tomara una *fotografía instantánea* de ellos, se obtendrían experimentalmente las líneas de corriente. Esto se puede lograr parcialmente, echando partículas finas y brillantes de aluminio en la superficie de un líquido.

[1] Ciertos autores llaman "impermanente" o "transitorio" al flujo variable.

En la definición se incluye la salvedad "en un instante" porque, si el flujo es variable, el campo de velocidades cambia con el tiempo y asimismo las líneas de corriente. En flujo permanente las líneas de corriente se mantienen fijas.

Puede ser útil escribir las ecuaciones diferenciales de las líneas de corriente, aunque no es integrándolas que generalmente se buscan dichas líneas. Por definición la velocidad es tangente a la línea de corriente, luego

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \qquad (3\text{-}3)$$

son las ecuaciones diferenciales

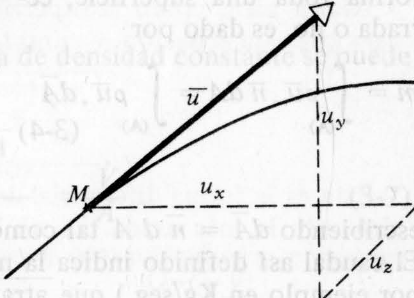


Figura 3.8.

Por fin la propiedad de tangencia indica que el fluido no cruza o atraviesa las líneas de corriente. Esta propiedad resulta muy interesante cuando se tiene además un régimen permanente. Entonces las líneas de corriente son fijas y un conjunto de ellas, apoyadas en una curva cualquiera forman verdaderos *"tubos de corriente"* por los cuales el fluido circula, sin atravesarlos.

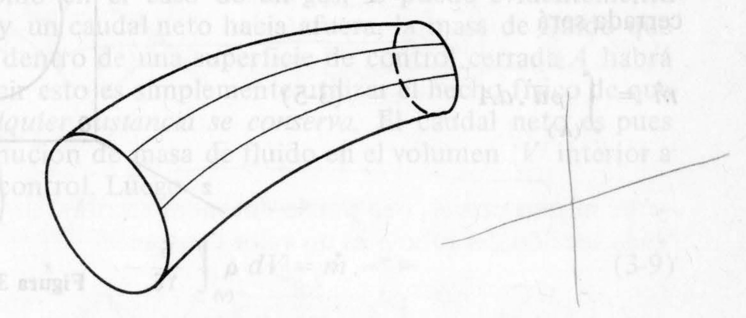


Figura 3.9.

3.4 Caudal y ecuación de continuidad

Para toda clase de problemas teóricos y de aplicaciones conviene saber calcular qué masa de fluido cruza o atraviesa una cierta referencia. Puede ser la entrada de un gas en una turbomáquina o el agua que fluye en el subsuelo en las cercanías de un pozo. En todo caso se requiere calcular el *caudal,* definido por

$$d\dot{m} = \rho\, u_n\, dA = \rho\, \bar{u} \cdot d\bar{A}$$

donde dA es un elemento de área y $\bar{u}$ la velocidad con que el fluido atraviesa dicho elemento. El caudal que atraviesa en esta forma toda una superficie, cerrada o no, es dado por

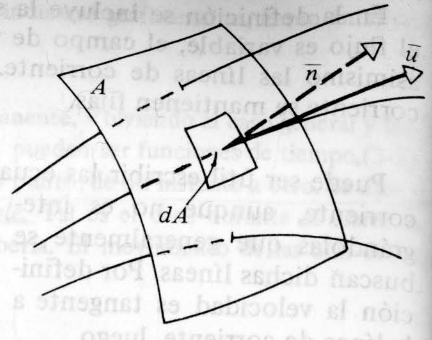


Figura 3.10.

$$\dot{m} = \int_{(A)} \rho \bar{u} \,.\, \bar{n}\, dA = \int_{(A)} \rho \bar{u} \,.\, d\bar{A} \qquad (3\text{-}4)$$

escribiendo $d\bar{A} = \bar{n}\, d\, A$ tal como es costumbre de diversos autores. El caudal así definido indica la masa por unidad de tiempo (medida por ejemplo en Kg/seg.) que atraviesa la superficie A, llamada a veces *superficie de control.*

Sea ahora un fluido cualquiera en movimiento y tomemos una superficie de control *cerrada A*, de forma y tamaño cualquiera. Por ciertos elementos de A el fluido penetra en su interior y por otros, como el dibujado sale. Por consiguiente, el *caudal neto* que *sale* por toda la superficie cerrada será

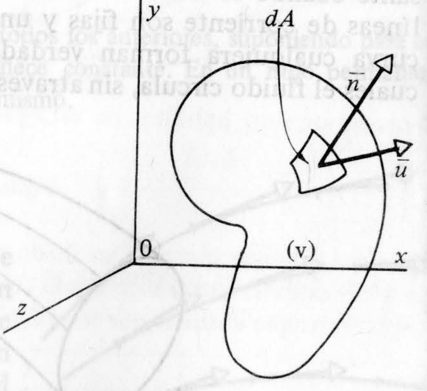


Figura 3.11.

$$\dot{m} = \int_{(A)} \rho \bar{u} \,.\, d\bar{A} \qquad (3\text{-}5)$$

En las aplicaciones técnicas, es muy útil el concepto de *velocidad media:* Se la puede definir como aquel valor que tendría la velocidad si el mismo caudal que atraviesa una superficie de control dada, fuera producido por una velocidad uniforme U_m perpendicular a dicha superficie.

Esto es, que

$$\int_{(A)} \rho\, U_m\, dA = \int \rho\, \bar{u} \,.\, d\bar{A}\,,$$

de donde

$$U_m = \frac{\int_{(A)} \rho\, \bar{u} \,.\, d\bar{A}}{\int_{(A)} \rho\, dA} \qquad (3\text{-}6)$$

En el supuesto de que el fluido sea de densidad constante se puede simplificar por ρ y se tiene

$$U_m = \frac{\int_{(A)} \bar{u} \,.\, d\bar{A}}{\int_{(A)} dA} = \frac{\dot{V}}{A} \qquad (3\text{-}7)$$

donde

$$\dot{V} = \int_{(A)} \bar{u} \,.\, d\bar{A} \qquad (3\text{-}8)$$

se llama caudal en volumen.

Ecuación de continuidad. Suponiendo que el fluido pueda ser compresible, como en el caso de un gas, se puede evidentemente decir que si hay un caudal neto hacia afuera, la masa de fluido que estaba incluido dentro de una superficie de control cerrada A habrá disminuido. Decir esto es simplemente utilizar el hecho físico de que la *masa de cualquier sustancia se conserva.* El caudal neto es pues igual a la disminución de masa de fluido en el volumen V interior a la superficie de control. Luego

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{(v)} \rho\, dV = \dot{m}\,. \qquad (3\text{-}9)$$

Comparando esta ecuación con (3-5) se tiene

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{(v)} \rho\, dV = \int_{(A)} \rho\, \bar{u} \cdot d\bar{A} \qquad (3\text{-}10)$$

ésta es la llamada *ecuación de la continuidad* en forma integral. Vemos que traduce simplemente la ley de la *conservación de la masa.* Más útil que esta forma, es la forma diferencial que se obtiene directamente de (3-10). Para ello, se aplica el teorema de la divergencia al

segundo miembro. Se tiene entonces, poniendo todo de un mismo lado

$$\int_{(v)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ \rho \overline{u} \right) dV = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

Ahora bien, como la superficie de control A se tomó cualquiera, para que esta ecuación se cumpla, ha de ser cierto que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ \ \rho \overline{u}\ = 0.} \qquad (3\text{-}12)$$

Esta es la forma diferencial de la ecuación de continuidad y probablemente la más usada. Es un buen ejercicio escribirla en distintas formas, y se propone así en los problemas a final de capítulo.

En las aplicaciones técnicas se usa la forma integral de la siguiente manera. Considérese un *tubo de corriente,* por el cual circule el fluido sin cruzar, como sabemos, sus paredes laterales. Entonces la ecuación (3-10) se escribe

$$-\int_{(v)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\ dV = \int_{(A_2)} \rho_2\ u_2\ dA - \int_{(A_1)} \rho_1\ u_1\ dA$$

Si se define la velocidad media

$$U_2 = \frac{\int u_2\, dA_2}{A_2} \qquad (3\text{-}13)$$

Figura 3.12.

y lo mismo con A_1, se puede entonces escribir, suponiendo que en cada sección del tubo ρ es un valor constante

$$-\int \frac{\partial \rho}{\partial t}\ dV = \rho_2\ U_2\ A_2\ - \rho_1\ U_1\ A_1 \qquad (3\text{-}13)$$

Por fin, en el caso muy frecuente de un régimen permanente

$$\rho_2\, U_2\, A_2\ = \rho_1\, U_1 A_1 \qquad (3\text{-}14)$$

Hay un caso más particular todavía, a saber cuando el fluido es de densidad constante. Entonces sea el régimen permanente o no, la ecuación de continuidad se puede escribir

$$U_2 A_2 = U_1 A_1\, , \qquad (3\text{-}15)$$

Esta es la ecuación que se llama a veces ecuación de continuidad, lo cual es cierto, siempre que quede claro su limitado alcance. El producto constante

$$\dot{V}\ = UA\ , \qquad (3\text{-}16)$$

se puede entonces llamar *caudal en volumen*, (ver también (3-8) ya que

$$[\dot{V}] = \frac{m^3}{seg}$$

EJERCICIOS

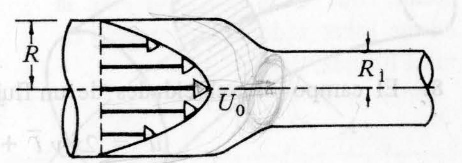
1. Escribir la forma diferencial de la ecuación de continuidad en corrdenadas cartesianas, partiendo de la expresión vectorial.

2. Si ρ = constante, escribir la ecuación de continuidad vectorialmente, y también en forma cartesiana en dos dimensiones.

3. Por una tubería circular de radio R fluye un fluido viscoso, con una distribución de velocidades dada por

$$u = U_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

Calcular la velocidad media en el tubo después que el diámetro ha sido reducido al valor $2R_1$. El fluido es de densidad costante.



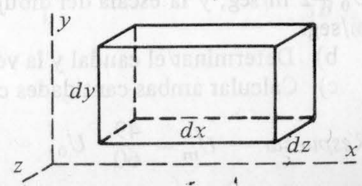
Respuesta: $U_m = R^2 U_0 / 2R_1^2$

4. Un fluido incompresible en flujo bidimensional se mueve según la distribución de velocidades dada por

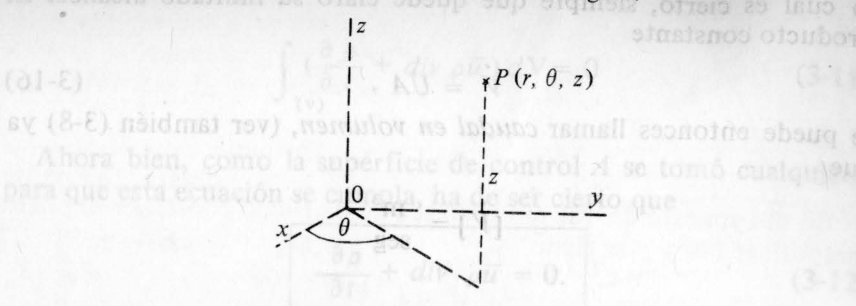
$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}\ ,\ u_y = \frac{-y}{x^2 + y^2}\ ,\ u_z = 0.$$

Verificar si se cumple o no la ecuación de continuidad. ¿Qué pasa en el origen $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$?

5. Escribir la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas, deduciéndola a partir de un elemento de volumen $dx\ dy\ dz$ en forma de paralelepípedo, usado como volumen de control.

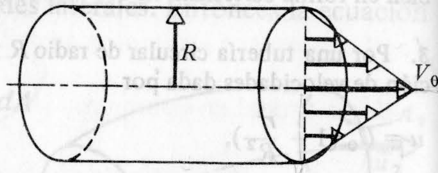


6. Deducir la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas, razonando sobre un elemento de volumen adecuadamente escogido.



Respuesta: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$

7. El agua que sale del extremo de un tubo circular tiene una distribución de velocidades como indica la figura. Encontrar la velocidad media U_m.



Respuesta: $U_m = \frac{1}{3}\, U_0$

8. El campo de velocidades de un flujo plano es dado por

$$\bar{u} = 2xy\,\bar{i} + (x^2 - y^2)\,\bar{j}\,.$$

Calcular el caudal que fluye a través de cada una de las caras del rectángulo $ABCD$, donde A (0,0), B (0,2), C (1,2), D (1,0), suponiendo un ancho unitario. Calcular el caudal neto a través de la superficie total del rectángulo. ¿Se podía prever el resultado? ¿Cómo?

9. El flujo turbulento de un fluido dentro de una tubería circular puede ser aproximado por la distribución de velocidades

$$U = U_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7}$$

a) Dibujar la curva representativa de esta distribución, cuando $R = 10$ cm, $U_0 = 2$ m/seg, y la escala del dibujo es: Dimensiones 1/5, Velocidades 1 cm = 1 m/seg.

b) Determinar el caudal y la velocidad media en términos generales.

c) Calcular ambas cantidades con los datos numéricos proporcionados.

Respuesta: $U_m = \frac{49}{60}\; U_0$.

10. El aire fluye en régimen permanente por una tobera convergente. Se dan las siguientes condiciones en las dos secciones (1) y (2):

$\rho_1 = 1{,}50\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $p_1 = 1.3$ bar,

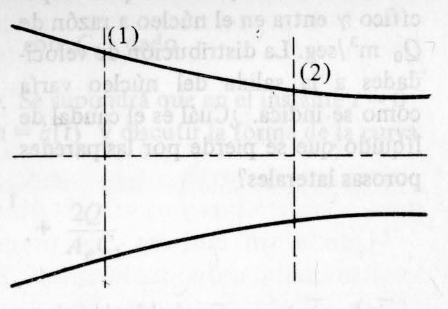
$U_1 = 100$ m/seg; $A_1 = 0.06$ m^2

$A_2 = 0.035$ m^2; $p_2 = 1.1$ bar

Se pide ρ_2 y U_2, sabiendo que

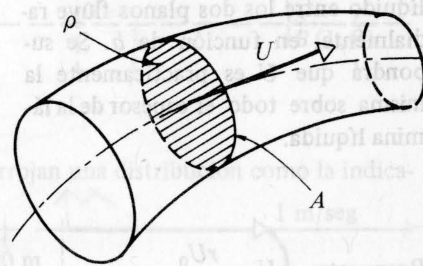
a) El flujo es isotermo,

b) El flujo es adiabático.



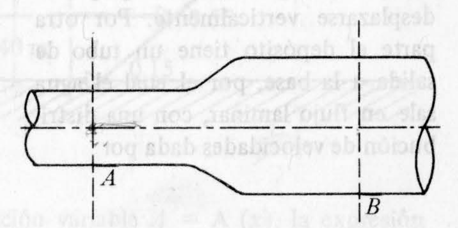
Respuesta: a) $\rho_2 = 1.27$ kg/m^3, $U_2 = 202$ m/seg; b) $\rho_2 = 1.33\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $U_2 = 193$ m/seg.

11. Un gas fluye por un ducto de sección variable, en régimen permanente. Si la densidad puede ser considerada constante en cada sección del tubo, mostrar que se puede escribir



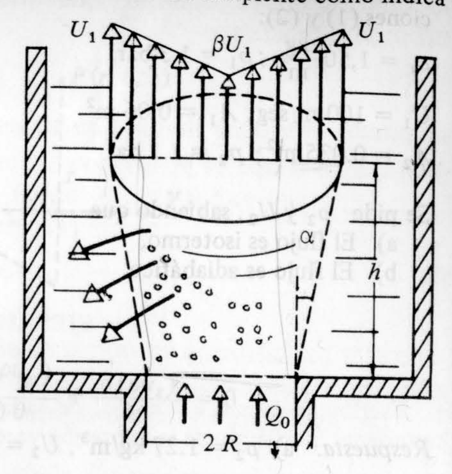
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} = 0.$$

12. Por una tubería fluye oxígeno puro. En la sección A el diámetro es de 100 mm., la temperatura 15°C, la presión 3 bar y la velocidad media 25 m/seg. En la sección B, donde el diámetro es 200 mm., la temperatura es de −5°C y la presión 1.5 bar. Calcular la velocidad media en B y el caudal en masa.

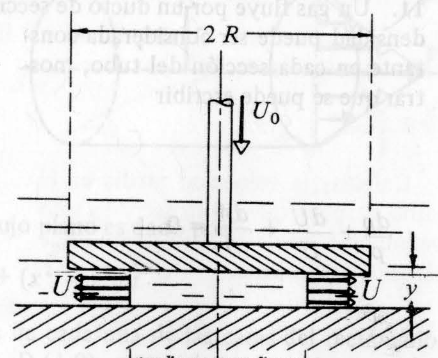


Respuesta: 11.6 m/seg, 0.786 kg/m^3

13. Un reactor nuclear experimental está diseñado con un núcleo que contiene pequeñas esferitas de material fisionable colocadas en un recipiente como indica la figura. Un líquido de peso específico γ entra en el núcleo a razón de Q_0 m³/seg. La distribución de velocidades a la salida del núcleo varía como se indica. ¿Cuál es el caudal de líquido que se pierde por las paredes porosas laterales?



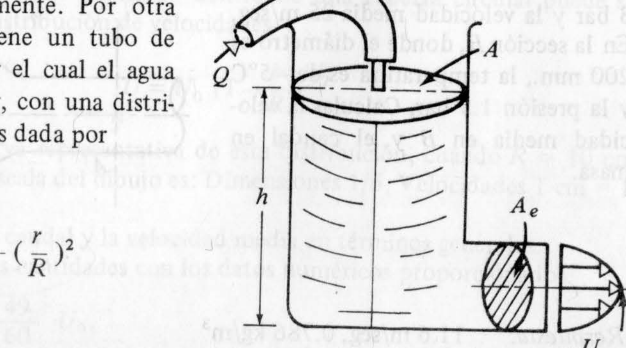
14. Una lámina circular de gran diámetro. $2R \gg y$, se acerca con velocidad constante U_0 de un plano infinito. Calcular la velocidad U con que el líquido entre los dos planos fluye radialmente, en función de b. Se supondrá que U es practicamente la misma sobre todo el espesor de la lámina líquida.



Respuesta: $U = \dfrac{rU_0}{2y}$

15. Se bombea agua a un depósito mediante un tubo de goma que está unido a la tapa del depósito. Esta tapa puede desplazarse verticalmente. Por otra parte el depósito tiene un tubo de salida a la base, por el cual el agua sale en flujo laminar, con una distribución de velocidades dada por

$$\frac{U}{U_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$



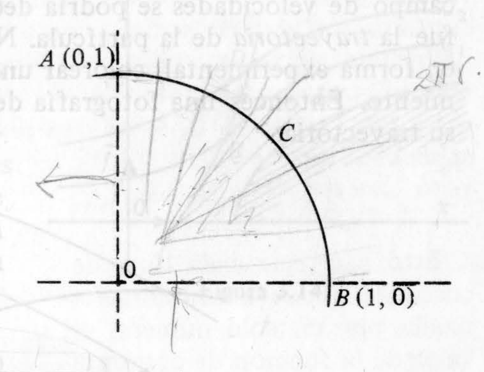
El caudal de entrada en el depósito es Q m³/seg. El área de la sección recta del depósito es A y la altura de líquido en él es h, en un momento dado. Si se sabe que

$$U_{max} = C_1\ h, \qquad \text{con } C_1 \text{ dado,}$$

se pide *encontrar h en función del tiempo.* Se supondrá que en el instante $t = 0$ se tiene $h = H$. Representar gráficamente $h = h(t)$ y discutir la forma de la curva en función de H.

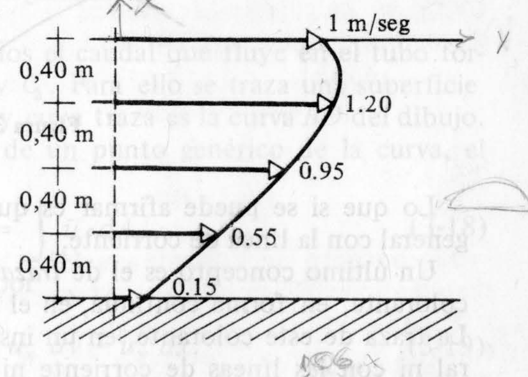
Respuesta: $h = \left(H - \dfrac{2Q}{A_e C_1}\right) \cdot e^{-\frac{A_e}{A} \frac{C_1}{2} t} + \dfrac{2Q}{A_e C_1}$

16. En un flujo bidimensional se da el campo de velocidades $\bar{u} = -4y\bar{i} - 4x\bar{j}$. Calcular el *caudal* que fluye a través de la superficie CAB indicada, con la unidad de ancho en el sentido Oz. Calcular también el caudal neto sobre la superficie cerrada $CAOB$. ¿Cómo se podía prever este último resultado?



Respuesta: $-4{,}0$.

17. Mediciones de velocidad en un río arrojan una distribución como la indicada en la figura. Evaluar, por integración numérica, el caudal por unidad de ancho.



Respuesta: 1.34 m³/seg., Simpson.

18. Demostrar que en un tubo de sección variable $A = A\ (x)$, la expresión diferencial de la ecuación de continuidad es, para un flujo compresible,

$$A\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho A u)}{\partial x} = 0.$$

3.5 Trayectorias y trazas

El concepto de líneas de corriente corresponde a una interpretación del flujo cónsona con el punto de vista de Euler, adoptado en esta exposición. Así, en cada instante, una imagen completa del campo de velocidades queda descrita. Este es el caso por ejemplo de la Fig. 3.13, en la cual las líneas de corriente fueron dibujadas, conjuntamente con el campo de velocidades. Por supuesto si el flujo no es permanente, esta imagen cambia con el tiempo.

Queda sin embargo, la pregunta: ¿Qué pasa con una partícula considerada individualmente? Si el régimen es variable, la pregunta es difícil de contestar. Posiblemente de varias fotos sucesivas de un campo de velocidades se podría deducir, en forma aproximada cuál fue la *trayectoria* de la partícula. Naturalmente la mejor manera es, en forma experimental, colorear una partícula y seguirla en su movimiento. Entonces una fotografía de larga exposición puede mostrar su trayectoria.

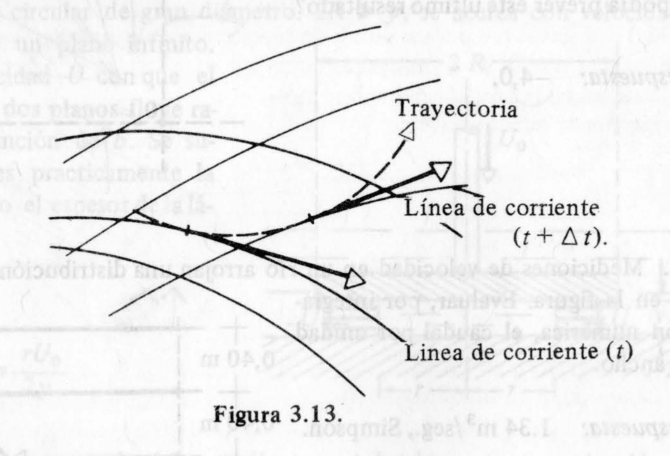


Figura 3.13.

Lo que sí se puede afirmar es que la trayectoria no coincide en general con la línea de corriente.

Un último concepto es el de *traza*. Aparece cuando se inyecta un colorante, en forma continua, en el seno del fluido en movimiento. La traza de este colorante, en un instante dado no coincide en general ni con las líneas de corriente ni con la trayectoria de *una* partícula.

Por fin debe señalarse el caso especial, pero muy importante, de un *régimen permanente*. Entonces las líneas de corriente son fijas. Una partícula recorre la línea de corriente en la cual se encuentra, y así hacen todas. Por consiguiente, trayectorias, trazas y líneas de corriente coinciden.

Para ilustrar todos estos conceptos con un ejemplo, que además es importante en los casos en que se aplica, vamos a ver cómo se determinan propiedades adicionales de las líneas de corriente, válidas tanto para fluidos ideales como para fluidos reales.

3.6 Función de corriente

Considérese un fluido de densidad constante en movimiento permanente bidimensional. Esto es el fluido se mueve paralelamente a un plano. Debido a esta simetría bastará estudiar lo que ocurre en un plano llamado x, y en el cual se dibujan los contornos de los objetos que obligan el movimiento del fluido, y las líneas de corriente. El propósito fundamental es el de poder describir cuantitativamente las propiedades de dichas líneas, de alguna otra manera que no sea por su ecuación diferencial, ya deducida, (3-3),

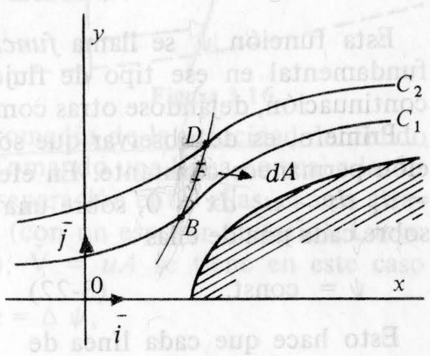


Figura 3.14.

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}, \qquad (3\text{-}17)$$

pero muy difícil de integrar en general.

Con ese propósito, evaluemos el caudal que fluye en el tubo formado por las dos líneas C_1 y C_2. Para ello se traza una superficie *cualquiera* que corte el tubo, y cuya traza es la curva BD del dibujo. Si x, y son las coordenadas de un punto genérico de la curva, el caudal de volumen

$$\dot{V} = \int_{(A)} \bar{u} \cdot d\bar{A}, \qquad (3\text{-}18)$$

se expresa en el presente caso por

$$\dot{V} = \int_{(BD)} u_x \, dy - u_y \, dx. \qquad (3\text{-}19)$$

ya que $d\bar{A} = \bar{i}\, dy - \bar{j}\, dx$.

Ahora bien, este caudal ha de ser el *mismo* para cualquier curva que pase por B y D, puesto que es el caudal que fluye por el tubo considerado. La integral planteada tiene pues que ser independiente del camino recorrido, y por consiguiente ha de ser una *diferencial total exacta*.

Así pues se llega a la conclusión de que existe una función $\psi = \psi(x, y)$ tal que

$$d\psi = u_x\, dy \quad u_y\, dx = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy, \qquad (3\text{-}20)$$

esto es, tal que

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad (3\text{-}21)$$

Esta función ψ se llama *función de corriente* y juega un papel fundamental en ese tipo de flujo. Algunas propiedades se verán a continuación, dejándose otras como ejercicios.

Primero, es de observar que sobre cada línea de corriente la función permanece constante. En efecto, de la (3-17) se deduce que $d\psi = u_x\, dy - u_y\, dx = 0$, sobre una línea de corriente, de manera que sobre cada una de ellas

$$\psi = \text{const.} \qquad (3\text{-}22)$$

Esto hace que cada línea de corriente quede ahora caracterizada por un solo número, el valor de la función de corriente que le corresponda. No solamente esto, sino que el caudal ahora es calculable de inmediato, puesto que según (3-19)

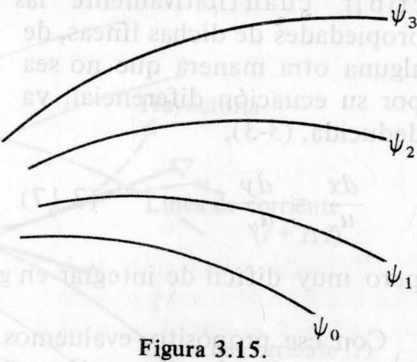


Figura 3.15.

$$\dot{V} = \int_{(BD)} d\psi = \psi_D - \psi_B = \psi_2 - \psi_1 \qquad (3\text{-}23)$$

El concepto de línea de corriente ha adquirido así un contenido matemático y físico mucho más preciso.

Físicamente hablando, se ve cómo la diferencia de los valores que toma la función de corriente de dos líneas representa el caudal de fluido que circula entre esas dos líneas. Cuando se hace una *representación gráfica* del flujo permanente de un fluido, se representan las líneas de corriente de manera tal que el caudal entre dos líneas sucesivas sea el mismo. Esto es

$$\psi_3 - \psi_2 = \psi_2 - \psi_1 = \psi_1 - \psi_0 = \Delta\psi = \dot{V}_0$$

Esta idea de representar sólo un número finito de líneas es de gran utilidad práctica. Cuando se las obtiene en forma experimental, esto es, sin que se conozca la expresión matemática del *campo de velocidades,* son de gran ayuda para describir en forma aproximada dicho campo.

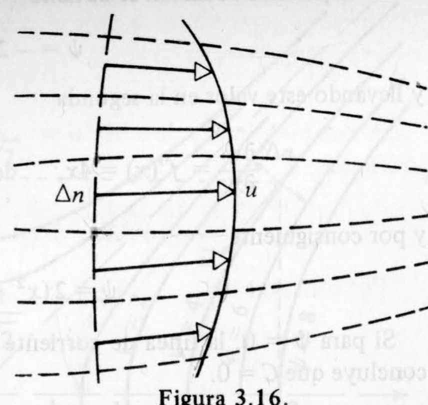


Figura 3.16.

Supóngase en efecto que el caudal entre las líneas de corriente dibujadas ψ_1, ψ_2 sea constante e igual a V_0, como se dijo. Entonces, en forma aproximada, se puede obtener el valor promedio de la velocidad del fluido que circula entre cada dos líneas. Tomando una línea normal a las líneas de corriente y llamando Δn la separación entre ellas, el área atravesada por el fluido es $\Delta A = 1\,\Delta n$ (con un espesor unitario). Luego de la expresión del caudal (3-16); $\dot{V} = uA$ se tiene en este caso

$$\dot{V} = u\,\Delta n = \Delta\,\psi,$$

y siendo $\Delta\psi$= constante entre 2 líneas cualesquiera,

$$u = \frac{\Delta\psi}{\Delta n}, \qquad (3\text{-}24)$$

indica que la velocidad es inversamente proporcional a la separación entre líneas de corriente. Así pues cuando más apretadas están las líneas de corriente mayor es la velocidad del fluido. Esta propiedad será usada en la representación gráfica de ciertos tipos de flujo.

Ejemplo:

Se da el campo de velocidades

$$\bar{u} = -4y\,\bar{i} \;-4x\,\bar{j}\ \text{, m/seg}$$

Determine la función de corriente ψ con la condición de que la línea de corriente correspondiente a $\psi = 0$ pase por el origen. Dibujar las líneas de corriente que encierren entre sí cuadales $\dot{V}_0 = 2\text{m}^3/\text{seg}$. En el punto A $(2, \sqrt{2})$ determinar entonces la separación entre dos líneas de corriente sucesivas.

De (3-21) se tiene

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = -4y, \quad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -4x$$

De la primera ecuación se obtiene

$$\psi = -2y^2 + f(x)$$

y llevando este valor en la segunda

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f'(x) = 4x, \qquad \text{de donde } f(x) = 2x^2 + C,$$

y por consiguiente

$$\psi = 2(x^2 - y^2) + C.$$

Si para $\psi = 0$, la línea de corriente ha de pasar por el origen $x = 0$, $y = 0$ se concluye que $C = 0$.

La función de corriente es pues

$$\psi = 2(x^2 - y^2), \qquad \text{m}^3/\text{seg.}$$

Las líneas de corriente se obtienen haciendo $\psi =$ const. Luego para $\psi = 0$, las líneas de corriente son dadas por

$$x^2 - y^2 = 0$$

Se trata de las dos rectas Δ y Δ' de ecuaciones $y = \pm x$. Para $\psi = 1$ la ecuación de ψ es

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$$

Se trata de una hipérbola que pasa por $y = 0$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y que admite por asíntotas las rectas Δ y Δ'.

Para $\psi = 2$ se tiene

$$x^2 - y^2 = 1$$

y es una hipérbola que pasa por $y = 0$, $x = 1$.

Así pues, se obtiene una familia de hipérbolas como la representada en la figura, de ecuación general

$$x^2 - y^2 = \frac{\psi_n}{2}.$$

Para valores negativos de ψ las líneas de corriente cambian de aspecto, aunque dadas por la misma ecuación general. Para $\psi = -1$, se tiene

$$x^2 - y^2 = -\frac{1}{2},$$

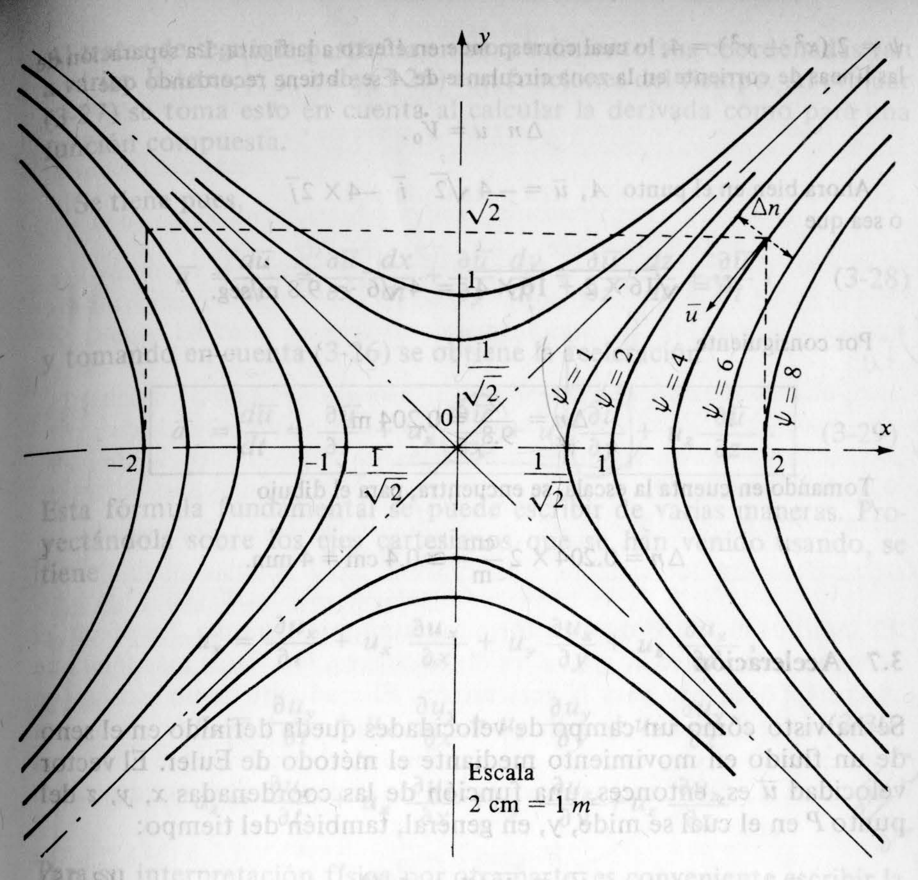


Figura 3.17.

esto es

$$y^2 - x^2 = \frac{1}{2},$$

o sea una hipérbola que pasa por los puntos $x = 0$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y admite las mismas asíntotas Δ y Δ'.

Las hipérbolas encontradas y sus asíntotas son las líneas de corriente de este flujo permanente. Se han dibujado las líneas de corriente correspondientes a

$$\psi = -2, 0, 2, 4, 6, 8.$$

Puesto que $\Delta\psi = \dot{V}_0$, según (3-24), se tiene que el caudal entre dos niveles de corriente sucesivas es $\dot{V}_0 = 2$ como pedido.

En el punto A $(2, \sqrt{2})$, como $x^2 - y^2 = \frac{\psi_n}{2}$, pasa la línea de corriente

$\psi = 2(x^2 - y^2) = 4$, lo cual corresponde en efecto a la figura. La separación de las líneas de corriente en la zona circulante de A se obtiene recordando que

$$\Delta n \quad u = \dot{V}_0 .$$

Ahora bien en el punto A, $\bar{u} = -4\sqrt{2}\;\bar{i}\; - 4 \times 2\bar{j}$

o sea que

$$U = \sqrt{16 \times 2 + 16 \times 4} = 4\sqrt{6} = 9.8 \text{ m/seg.}$$

Por consiguiente

$$\Delta n = \frac{2}{9.8} = 0.204 \text{ m.}$$

Tomando en cuenta la escala, se encuentra, para el dibujo

$$\Delta n = 0.204 \times 2 \frac{\text{cm}}{\text{m}} \cong 0.4 \text{ cm} = 4 \text{ mm.}$$

3.7 Aceleración

Se ha visto cómo un campo de velocidades queda definido en el seno de un fluido en movimiento mediante el método de Euler. El vector velocidad $\bar{u}$ es, entonces, una función de las coordenadas x, y, z del punto P en el cual se mide, y, en general, también del tiempo:

$$\bar{u} = \bar{u}\,(x, y, z, t) \tag{3-25}$$

La ventaja alcanzada por este punto de vista trae consigo naturalmente ciertos inconvenientes cuando se quiere seguir a la partícula en su movimiento, ya que no es éste el propósito del método. Sin embargo, si se quiere ver cómo varía la velocidad, o más generalmente, cualquier propiedad asociada al fluido, como la densidad, la entropía, etc., no hay otro remedio sino seguir a un mismo elemento de volumen en su movimiento.

Considérese primero el cambio de posición de la partícula en un intervalo de tiempo dt. Si sus coordenadas son inicialmente x, y, z su incremento será

$$dx = u_x\,dt, \quad dy = u_y\,dt, \quad dz = u_z\,dt. \tag{3-26}$$

La variación de la velocidad con el tiempo se llama naturalmente *aceleración* y está definida por

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{dt} \tag{3-27}$$

Al tratar de seguir la partícula en su movimiento, sus coordenadas van a variar. Esto es, x, y, z de (3-25) son funciones del tiempo. Al evaluar (3-27) se toma esto en cuenta al calcular la derivada como para una función compuesta.

Se tiene pues,

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \tag{3-28}$$

y tomando en cuenta (3-26) se obtiene la aceleración

$$\bar{a} = \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \tag{3-29}$$

Esta fórmula fundamental se puede escribir de varias maneras. Proyectándola sobre los ejes cartesianos que se han venido usando, se tiene

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z},$$

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \tag{3-30}$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Para su interpretación física por otra parte, es conveniente escribir la aceleración en forma intrínseca, esto es, en forma independiente de cualquier sistema de coordenadas. Entonces se obtiene[2]

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \text{grad}\,\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u}. \tag{3-31}$$

La aceleración de una partícula consta pues de dos términos. El término $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ indica cómo varía la velocidad $\bar{u}$ en el punto $P(x, y, z)$ en función del tiempo. Por esto se le llama la *aceleración local.* Es de observar que si el movimiento del fluido es permanente, la aceleración local es nula.

El segundo término es más complejo. Es el que toma en cuenta la variación de la velocidad al pasar la partícula de un punto al vecino. Por ello se llama *aceleración convectiva.*

La velocidad no es la única magnitud física cuya variación, cuando los elementos del fluido se desplazan, interese estudiar. Ya se han mencionado la densidad y la entropía. Ve[illegible]o de la *densidad.*

[2] Este tipo de derivada se llama también *derivada sus*[illegible]

importante de por sí. La densidad de un elemento de fluido es evidentemente una función de la posición y del tiempo, esto es

$$\rho = \rho\,(x,\ y,\ z,\ t). \tag{3-32}$$

Su variación en el tiempo será pues dada por

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

y recordando (3-26) se puede escribir

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x\frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y\frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z\frac{\partial \rho}{\partial z} \tag{3-33}$$

o en forma vectorial

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{u}\cdot \text{grad}\ \rho. \tag{3-34}$$

El significado físico de esta fórmula es muy instructivo. En efecto el término convectivo $\overline{u}$. grad ρ es de *interpretación física* más fácil que el correspondiente para la aceleración. El gradiente de un escalar (en este caso la densidad ρ) indica, como es sabido, la dirección de mayor variación de dicho escalar. Al multiplicarlo escalarmente por una dirección $\overline{n}$, se obtendría la variación de la densidad en esa dirección

$$\overline{n}\cdot \text{grad}\ \rho = \frac{d\rho}{dn}. \tag{3-35}$$

Entonces al multiplicar el gradiente por la velocidad $\overline{u}$ se ve que se obtiene realmente la tasa de variación de la densidad en la dirección del movimiento, tanto mayor además cuanto mayor la velocidad. Este es pues el sentido físico de $\overline{u}\cdot$ grad ρ y se comprende que se le llame *término convectivo*.

Por otra parte, la fórmula (3-34) permite establecer con exactitud el criterio de compresibilidad. En efecto, si un fluido es incompresible la densidad de un mismo elemento cuando se mueve, debe permanecer la misma. Por consiguiente el flujo de un fluido se producirá en forma *incompresible* si

$$\frac{d\rho}{dt} = 0. \tag{3-36}$$

Es de anotar que esta definición de incompresibilidad deja lugar, por ejemplo, para el caso de un *líquido incompresible* de densidad variable.

Ejercicios

1. Demostrar que si las componentes u_x, u_y de la velocidad son calculadas a partir de una función de corriente $\psi = \psi(x,\ y)$ la ecuación de continuidad queda satisfecha siempre.

2. Se da campo de velocidades en flujo permanente por $u = \overline{i} + 2\,x\,\overline{j}$

a) Determinar la función de corriente ψ con la condición que la línea de corriente correspondiente a $\psi = 0$ pase por el origen.

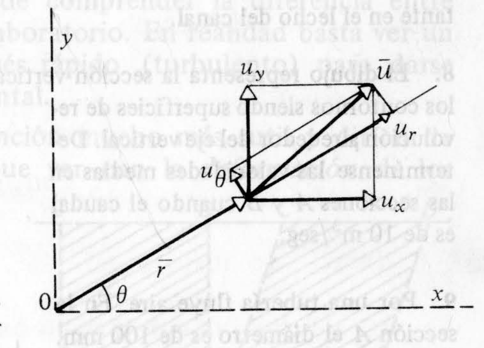
b) Dibujar las líneas de corriente correspondientes a $\psi = -1$, $\psi = 0$, $\psi = 1$, $\psi = 2$, etc.

c) Calcular el caudal en volumen que atraviesa la superficie cilíndrica de generatriz paralela a Oz y de curva directriz un cuarto de c ircunferencia que pasa por los puntos $A((0,2)$, $B(2,0)$ con centro en el origen, por unidad de ancho. El vector $\overline{u}$ fue dado en m/seg.

Respuesta: $\psi = -x^2 + y$; V = 6.

3. El dibujo indica el vector de velocidad $\overline{u}$ referido a dos sistemas distintos de ejes de coordenadas cartesianas y polares. Partiendo de que la función de corriente es la misma en cualquier sistema:

$$\psi = \psi\,(x, y) = \psi(r,\ \theta)$$



y recordando que

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\ \text{sen}\ \theta,$$

demostrar que las componentes u_r, u_θ de la velocidad se pueden expresar por

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta};\quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

4. Partiendo de la definición de aceleración $\overline{a} = \dfrac{du}{dt}$ y usando eventualmente la primera fórmula de Frenet, encontrar el vector aceleración proyectado sobre la tangente, normal y binormal de la trayectoria de una partícula de fluido

Respuesta: $\overline{a} = \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial \dfrac{U^2}{2}}{\partial s}\overline{e} + \dfrac{U^2}{R}\overline{n}.$

5. Demostrar, usando coordenadas cartesianas, la identidad vectorial

$$\overline{u}\cdot\nabla\,\overline{u} = \nabla\frac{U^2}{2} - \overline{u}\times\nabla\,\overline{u}.$$

6. Dada la función de corriente de flujo de un fluido de densidad constante $\psi = x^2 - y^2$, mostrar que la magnitud del vector aceleración es proporcional al vector de posición.

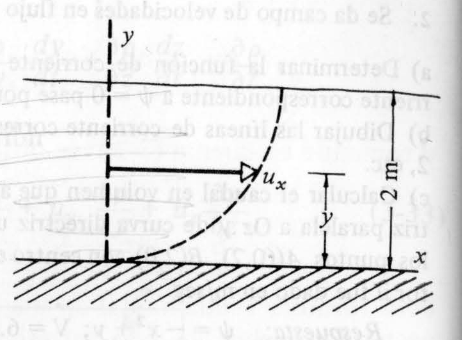
7. En el flujo de un fluido viscoso se tiene una distribución de velocidades dada por

$$u_x = -2y + 4y^2 \quad \text{m/seg.}$$

a) Calcular el caudal para un ancho unitario (1 m.)

b) Calcular la velocidad media de este flujo.

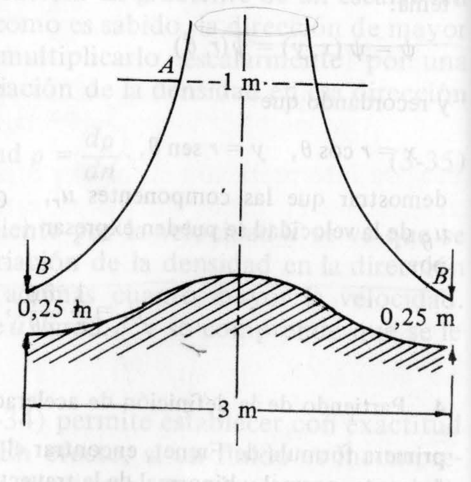
c) Determinar la función de corriente ψ sabiendo que la línea de corriente $y = 0$ corresponde a $\psi = 0$.



d) Si el fluido es petróleo crudo ($\delta = 0.86$) a 30°C encontrar el esfuerzo cortante en el lecho del canal.

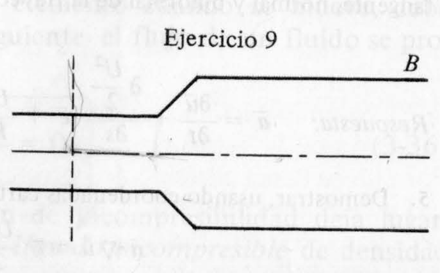
8. El dibujo representa la sección vertical del tubo de descarga de una turbina, los contornos siendo superficies de revolución alrededor del eje vertical. Determínense las velocidades medias en las secciones A y B cuando el caudal es de 10 m^3/seg.

9. Por una tubería fluye aire. En la sección A el diámetro es de 100 mm. la temperatura 15°C, la presión 3 bar y la velocidad 25 m/seg; en la sección B donde el diámetro es 200 mm. la temperatura es de -5°C y la presión 1.5 bar. Calcular la velocidad media en B y el caudal en masa.



10. Siendo $u_x = x^2 + 2x - y^2$ la componente de la velocidad en la dirección de Ox, en el movimiento bidimensional de un fluido incompresible, encontrar la componente u_y del movimiento. Encontrar la función de corriente ψ, haciendo que la línea de corriente que pasa por el origen corresponda a $\psi = 0$.

Ejercicio 9



11. Se llama flujo axisimétrico un flujo tridimensional con un eje de simetría, de manera que ninguna característica del movimiento dependa de la orientación alrededor del eje.

a) Utilizando coordenadas cilíndricas escribir la ecuación de continuidad para el flujo axisimétrico de un fluido incompresible.

b) Deducir la posibilidad de existencia de una función de corriente para este tipo de escurrimiento y encontrar la relación que la liga a las componenetes u_r y u_z de la velocidad, (Función de corriente de Stokes).

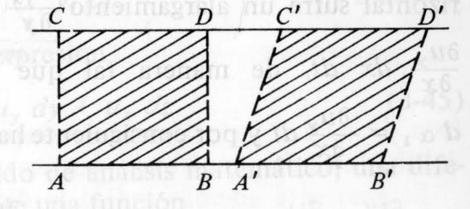
Respuesta: $u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial z}$, $u_z = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}$.

3.8 Torbellinos y rotacional. Flujo potencial

En el movimiento de los fluidos considerado desde un punto de vista puramente cinemático se hacen varios tipos de clasificación.

Un fluido real se mueve en forma *laminar o turbulenta,* como ya se dijo. Quizás la mejor manera de comprender la diferencia entre ambos es de observarlos en el laboratorio. En realidad basta ver un chorro lento (laminar) y después rápido (turbulento) para darse cuenta de su disparidad fundamental.

Existe sin embargo una distinción mucho más sutil y difícil de captar físicamente, que tiene que ver con la *deformación* de los elementos del fluido durante su movimiento. Considérese un pequeño elemento cúbico del fluido. Durante el movimiento el elemento se deforma de muchas posibles maneras, y por consiguiente gira, en general, alrededor de su centro de gravedad con cierta velocidad angular. Se tiene entonces el caso general de un *flujo rotacional,* y se dice que el fluido tiene *torbellinos, o vórtices.*



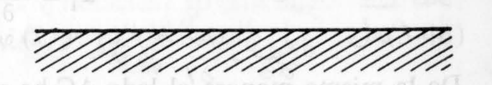


Figura 3.18.

Puede ocurrir, y ya se verá más adelante en qué condiciones, que ninguno de los elementos del fluido esté sometido a esta rotación sobre sí mismo. Se tiene entonces un *flujo irrotacional.*

En este momento lo que se quiere es encontrar un criterio cinemático para distinguir, conocido el campo de velocidades del *movimiento* de un fluido, cuando es rotacional y cuando no.

Vamos a hacer los razonamientos sobre el plano xy que muestra una cara del elemento de volumen en estudio, ya que es fácil genera-

lizar después el resultado obtenido al caso tridimensional.

La figura representa un elemento de volumen por una de sus caras ABCD y sobrepuesto, el elemento deformado $A'B'C'D'$ obtenido después de un pequeño desplazamiento de todo el elemento. Si las dimensiones iniciales del elemento son dx, dy, se ve que el lado ho-

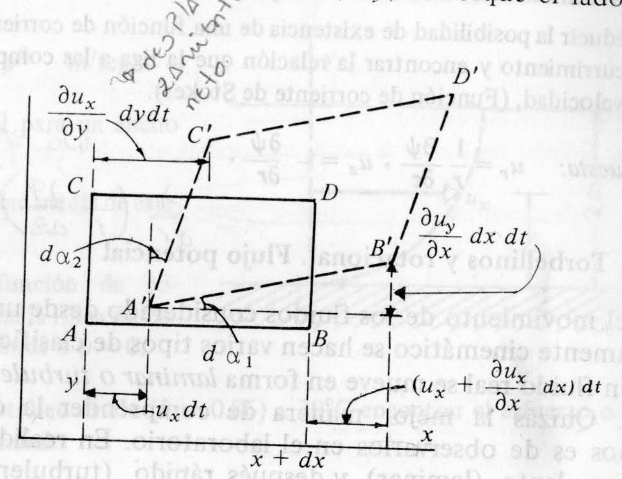


Figura 3.19.

rizontal sufre un alargamiento $\frac{\partial u_x}{\partial x}\, dx\, dt$ y su extremo B sube de $\frac{\partial u_y}{\partial x}\, dx\, dt$, de manera tal que el lado AB sufre una rotación $d\,\alpha_1 = \frac{\partial u_y}{\partial x}\, dt$ y por consiguiente ha girado con una velocidad angular

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial u_y}{\partial x}\,. \tag{3-37}$$

De la misma manera el lado AC ha girado con una velocidad angular,

$$\dot{\alpha}_2 = -\frac{\partial u_x}{\partial y}\,, \tag{3-38}$$

donde el signo $-$ indica una rotación negativa si $\frac{\partial u_x}{\partial y} > 0$, de manera que la *velocidad angular* promedio del elemento en conjunto es

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{3-39}$$

siendo el eje z, como se indica, el eje de rotación.

Generalizando este resultado el caso tridimensional, se puede pues decir que el elemento de volumen gira, debido a su deformación, con una velocidad angular

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\,\text{Rot}\,\overline{u} = \frac{1}{2}\,\nabla \times \overline{u} \tag{3-40}$$

Y entonces se puede definir cualitativamente el *torbellino* (o vórtice) en cada punto del fluido como el vector:

$$\overline{\xi} = 2\,\overline{\omega} = \nabla \times \overline{u} \tag{3-41}$$

Así pues un fluido se moverá en forma *irrotacional* cuando en ninguno de sus puntos existan torbellinos, esto es, cuando

$$\text{Rot}\,\overline{u} = 0 \tag{3-42}$$

lo cual se traduce, para las componentes de la velocidad, en las relaciones:

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}\,, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \tag{3-43}$$

Consideremos ahora el movimiento permanente de un fluido. El campo de velocidades es dado por

$$\overline{u} = \overline{u}\,(x, y, z)\,. \tag{3-44}$$

Si el régimen es irrotacional, la expresión

$$u_x\, dx + u_y\, dy + u_z\, dz \tag{3-45}$$

es, debido a un teorema conocido de análisis matemático*, una diferencial total exacta. Esto es, existe una función

$$\varphi = \varphi\,(x, y, z) \tag{3-46}$$

tal que

$$d\varphi = u_x\, dx + u_y\, dy + u_z\, dz, \tag{3-47}$$

La función φ se llama *potencial de velocidades* y debido a (3-47) queda definida por

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,, \tag{3-48}$$

esto es

$$\overline{u} = \nabla \varphi = \text{grad}\,\varphi. \tag{3-49}$$

*El lector podrá usar el teorema de Stokes para demostrarlo.

Así pues, se ha llegado a la conclusión que en un régimen permanente irrotacional existe un potencial de velocidades φ, del cual deriva el campo de velocidades mediante la relación (3-47). Se dice entonces que se tiene un *flujo potencial,* con la consiguiente ventaja al tener en las ecuaciones una sola incógnita φ, en vez de las tres u_x, u_y, u_z.

Otra ventaja es una interpretación física del flujo gracias a las *superficies equipotenciales.* Se llaman así superficies en las cuales se cumple

$$\varphi\,(x,\,y,\,z) = \text{const.} \qquad (3\text{-}50)$$

y juegan el mismo papel que las superficies de nivel para la energía y potencial del peso de un cuerpo, por ejemplo. De la definición (3-47) se deduce que, moviéndose sobre una de las superficies equipotenciales, se tiene

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dz,$$

o sea, recordando (3-47)

$$\overline{u}\cdot d\overline{r} = 0, \qquad (3\text{-}51)$$

Figura 3.20.

Esta propiedad naturalmente se interpreta diciendo que la *velocidad* del fluido es perpendicular a las superficies equipotenciales.

El gradiente además indica la dirección según la cual la función potencial tiene mayor variación y da una medida de dicha variación. En efecto, en la dirección de $\nabla\varphi$ se tiene

$$\frac{d\varphi}{ds} = \nabla\varphi\cdot\overline{e}$$

esto es

$$\frac{d\varphi}{ds} = \overline{u}\cdot\overline{e} = U \qquad (3\text{-}52)$$

ya que $\overline{e}$ es el vector unitario.

Gráficamente se logra utilizar esta relación (3-52), dibujando un número *limitado* de superficies (o líneas) equipotenciales, de manera

que

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = \cdots = \text{const.}$$

Entonces, haciendo $\dfrac{d\varphi}{ds} \approx \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ se puede escribir

$$U = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

esto es, la velocidad es inversamente proporcional a la separación de las equipotenciales.

3.9 Velocidad de deformación

Como se habrá observado en la sección anterior, un elemento de fluido en movimiento se deforma constantemente. Ello queda claramente de manifiesto en las expresiones (3-37) y (3-38) que representan la velocidad de rotación de dos lados de un elemento inicialmente rectangular.

Se puede definir un cierto valor medio de la "velocidad de deformación" por la expresión

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\,(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right), \qquad (3\text{-}53)$$

la cual representa, dicho más gráficamente, la velocidad con que disminuye el ángulo BAC, inicialmente recto.

Naturalmente, en un elemento tridimensional de fluido, habrá otras dos componentes de la velocidad de deformación angular, definidas según

$$\dot{\epsilon}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\;;\quad \dot{\epsilon}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \qquad (3\text{-}53)$$

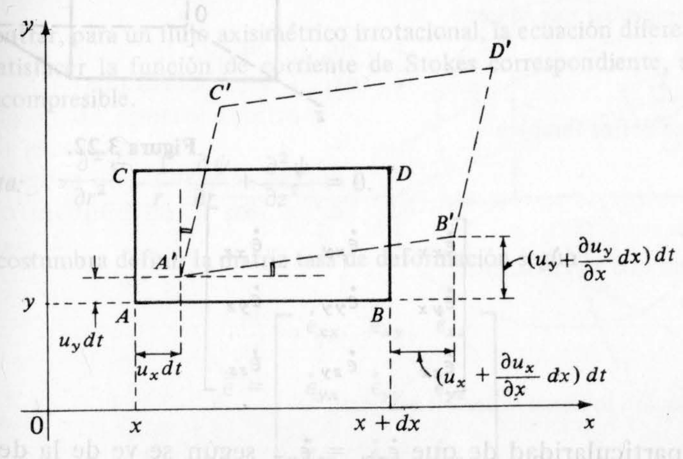


Figura 3.21.

La descripción completa de la deformación del elemento de fluido no termina aquí, sin embargo, ya que además de cambiar de forma el elemento ABCD puede cambiar de tamaño en el proceso de deformación.

Es fácil evaluar el cambio de dimensión de cada uno de sus lados, esto es lo que se puede llamar la *"velocidad de elongación"*. En efecto de la figura se desprende que el cambio de longitud de AB, en la dirección x es

$$(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx)\, dt - u_x\, dt = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\, dt$$

de manera que la elongación por unidad de longitud y de tiempo será

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad (3\text{-}54)$$

y asimismo para las otras dos direcciones

$$\dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \qquad (3\text{-}54)$$

En un elemento cúbico de fluido se produce pues, una deformación que, en su conjunto, puede ser representada mediante nueve componentes que se presentan a veces en forma matricial

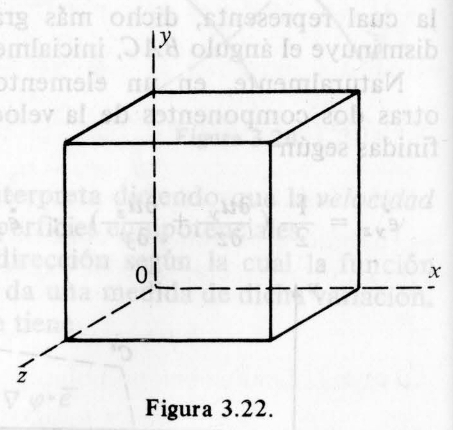


Figura 3.22.

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}55)$$

con la particularidad de que $\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx}$ según se ve de la definición

(3-53). Los términos de esta matriz constituyen pues las componentes de la ',velocidad de deformación" del elemento de fluido.

Ejercicios

1. Demostrar que

$$\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz} = \nabla \cdot \bar{u}$$

y que esta expresión representa el cambio de volumen por unidad de volumen del fluido, esto es

$$\nabla \cdot \bar{u} = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt}.$$

2. Demostrar que en el escurrimiento irrotacional plano de un fluido incompresible, la función de corriente correspondiente es armónica, esto es, satisface a la ecuación de Laplace.

3. Determinar la ecuación diferencial que ha de satisfacer el potencial de velocidades de un escurrimiento axisimétrico irrotacional, de un fluido incompresible.

Respuesta: $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$

4. Demostrar que el potencial de velocidades asociado al movimiento irrotacional de un fluido incompresible, satisface la ecuación de Laplace.

5. Encontrar, para un flujo axisimétrico irrotacional, la ecuación diferencial que ha de satisfacer la función de corriente de Stokes correspondiente, siendo el fluido incompresible.

Respuesta: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$

6. Se acostumbra definir la matriz tasa de deformación según

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix}$$

Si asimismo se define la matriz velocidad de rotación como

$$\overline{\overline{\omega}} = \begin{bmatrix} O & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & O & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & O \end{bmatrix}$$

mostrar que se tiene

$$\overline{\overline{\dot{\epsilon}}} + \overline{\overline{\omega}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Se observará que $\overline{\overline{\omega}}$ es antisimétrica.

7. Existe otra notación para indicar las nueve componentes de la matriz $\dot{\epsilon}$, que consiste en cambiar los subíndices x, y, z respectivamente por 1, 2, 3, indicándolo de la manera siguiente:

$$\overline{\overline{\dot{\epsilon}}} = [\dot{\epsilon}_{ij}] \quad , (i, j = 1, 2, 3).$$

Se puede entonces hablar de la matriz tasa de deformación indicando simplemente su componente genérica: $\dot{\epsilon}_{ij}$

a) Comprobar que se tiene

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

b) Si se define también

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

comprobar que efectivamente

$$\dot{\epsilon}_{ij} + \omega_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

(Esta notación se llama *notacion indicial*).

CAPITULO 4

Ecuación de Euler y aplicaciones

EN ESTE capítulo se va a estudiar el movimiento de un fluido ideal en términos de las fuerzas que lo producen. Las leyes que se obtendrán serán pues consecuencia de la ley de Newton. Sólo su expresión matemática cambiará al ser aplicada a un medio continuo como es el fluido.

4.1. Ecuación de Euler

Considérese pues un fluido no viscoso en movimiento y sea V un volumen de control arbitrariamente escogido.

Las fuerzas que actúan sobre el fluido incluido en V son las siguientes:

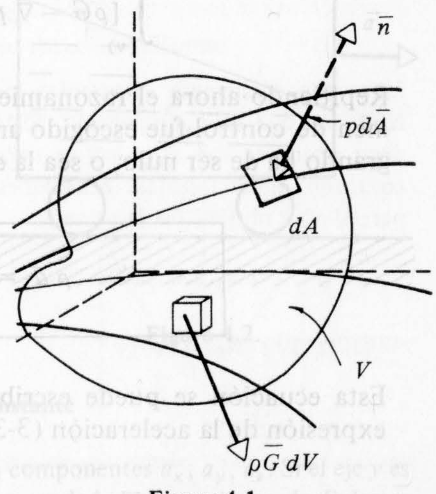


Figura 4.1.

1. Las fuerzas de presión p que actúan sobre todo elemento de área dA de la superficie de control A que limita V.

$$-\int_{(A)} p\,\overline{n}\,dA, \qquad (4\text{-}1)$$

2. Las fuerzas de volumen que actúan sobre un elemento de masa ρdV debidas a la acción de un campo de fuerzas $\overline{G}$ (por ejemplo el gravitacional).

$$\int_{(v)} \rho\overline{G}\;d\text{V}. \qquad (4\text{-}2)$$

La suma de estas fuerzas, aplicando la ley de Newton para un sistema material, ha de ser igual a la suma de los productos de la masa por la aceleración de cada partícula. Por consiguiente, se tiene

$$\int_{(v)} \rho\,\overline{G}\;d\text{V} - \int p\,\overline{n}\,dA = \int \rho\,\overline{a}\;d\text{V} \qquad (4\text{-}3)$$

La segunda integral se puede transformar fácilmente en una integral de volumen, utilizando el teorema del gradiente, según el cual

$$\int_{(A)} p\,d\overline{A} = \int_{(v)} \nabla\,p\;d\text{V}. \qquad (4\text{-}4)$$

Por consiguiente (4-3) se escribe

$$\int_{(v)} [\rho\overline{G} - \nabla\,p - \rho\,\overline{a}\,]\;d\text{V} = 0$$

Repitiendo ahora el razonamiento (ver 3-11) basado en que el volumen de control fue escogido arbitrariamente, se concluye que el integrando ha de ser nulo, o sea la *ecuación de Euler*,

$$\rho\,\overline{a} = -\nabla p + \rho\overline{G} \qquad (4\text{-}5)$$

Esta ecuación se puede escribir en formas distintas. Recordando la expresión de la aceleración (3-31), por ejemplo, se tiene

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\cdot\nabla\,\overline{u} = -\frac{1}{\rho}\;\nabla p + \overline{G}\,, \qquad (4\text{-}6)$$

y en coordenadas cartesianas las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} + G_x\\
\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y} + G_y\\
\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z} + G_z,
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}7)$$

también llamadas *ecuaciones de Euler*.

4.2 Equilibrio relativo

El ejemplo más sencillo de aplicación de la ecuación de Euler es sin duda el caso de la estática; entonces no hay movimiento, $\overline{a} = 0$, y la ecuación (4-5) se reduce a la ecuación fundamental de la estática de los fluidos (2-5).

Como segundo caso particular, se va a considerar en esta sección el llamado equilibrio relativo. Se trata de estudiar la distribución de presiones en el seno de un fluido que se mueve conjuntamente con el recipiente que lo contiene de manera que está en reposo (relativo) con respecto a él. Un ejemplo de este tipo de movimiento es el de un envase lleno de líquido en traslación rectilínea de aceleración constante. Entonces el fluido se desplaza como un cuerpo rígido puesto que ninguna de las partículas se mueve con respecto a las demás, ni con respecto al recipiente. Su aceleración será pues la misma en todos los puntos o, en el peor caso, calculable por las leyes cinemáticas de un cuerpo rígido.

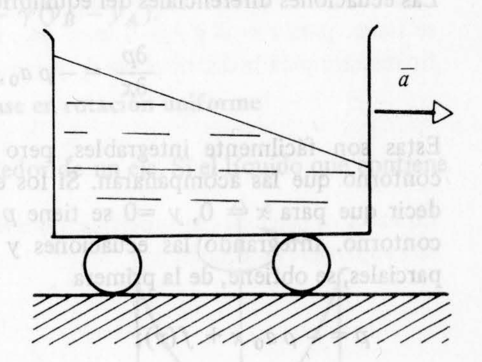


Figura 4.2.

Ejemplo 1: Traslación con aceleración constante

Sea $\overline{a}$ el vector aceleración, en general, de componentes a_x, a_y, a_z. Si el eje y es paralelo al vector g de la aceleración de gravedad, las ecuaciones de Euler se escriben

$$a_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$a_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g \qquad (4\text{-}8)$$

$$a_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

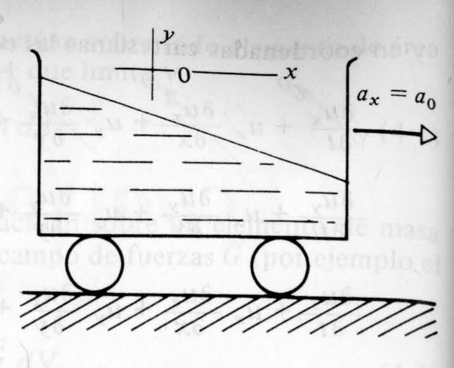


Figura 4.3.

Considérese ahora el problema particular propuesto más arriba de un recipiente moviéndose horizontalmente en la dirección x. Entonces $a_y = 0$, $a_z = 0$ y las ecuaciones del movimiento se escriben:

$$a_0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g,$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z}$$

La primera conclusión es que p no depende de z, esto es

$$p = p\,(x, y)$$

Las ecuaciones diferenciales del equilibrio relativo son pues

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\, a_0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g.$$

Estas son fácilmente integrables, pero conviene enunciar las condiciones de contorno que las acompañarán. Si los ejes se toman como se indica, se puede decir que para $x = 0$, $y = 0$ se tiene $p = p_0$, ésta será pues la condición de contorno. Integrando las ecuaciones y recordando que se trata de derivadas parciales, se obtiene, de la primera

$$p = -\rho\, a_0\, x + f(y);$$

sustituyendo en la segunda

$$-\rho g = \frac{df}{dy}$$

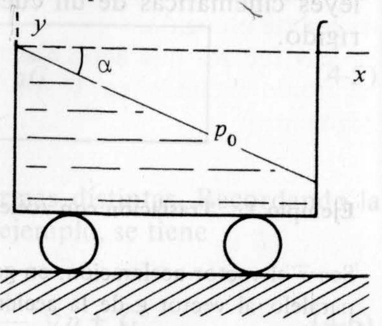


Figura 4.4.

de donde

$$f = -\rho g y + C_1$$

y por consiguiente

$$p = -\rho\, a_0 x - \rho\, g\, y + C_1$$

Usando la condición de contorno se obtiene que $C_1 = p_0$. Luego

$$p = p_0 - \rho\, a_0 x - \rho g y.$$

Este es el campo de presiones en el seno del fluido.

Superficie Libre: La superficie libre queda definida por la condición $p = p_0$; luego es una recta de ecuación

$$y = -\frac{a_0}{g}\, x.$$

Se ve que su pendiente es negativa y que $tg\, \alpha = \dfrac{a_0}{g}$.

Se propone ahora como ejercicio, mostrar que las líneas de igual presión son paralelas a la superficie libre, y que si A y B son dos puntos sobre la misma vertical

$$p_B - p_A = -\gamma\,(y_B - y_A).$$

Ejemplo 2: Líquido dentro de un envase en rotación uniforme

Sea un envase cilíndrico que gira alrededor de un eje. Si el líquido que contiene es arrastrado por él y gira con la misma velocidad angular ω, se pide la distribución de presiones en el fluido y la forma de la superficie libre. Para estudiar este problema se usarán coordenadas cilíndricas por adaptarse más a la simetría circular que presenta. La ecuación de Euler, proyectada sobre el eje z y a lo largo de un radio r, se escribe

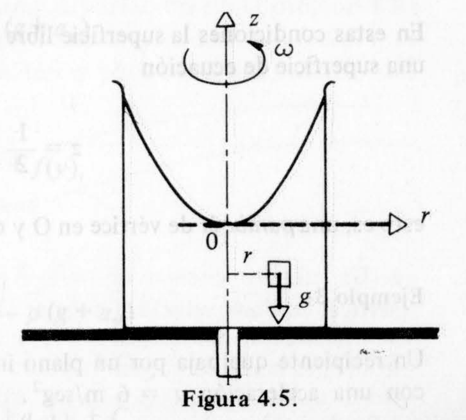


Figura 4.5.

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g,$$

$$-r\,\omega^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

Este es el sistema de ecuaciones diferenciales que resuelve el problema. De la segunda ecuación se saca

$$p = \frac{1}{2}\,\rho\, r^2 \omega^2 + f(z)$$

e introduciendo esta expresión en la primera

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g = f'(z)$$

se obtiene

$$f(z) = -\rho\, gz + C.$$

De donde, la distribución de presiones

$$p = \frac{1}{2}\,\rho\, r^2 \omega^2 - \rho g z + C.$$

Las condiciones de contorno son conocidas en la superficie libre. Si se toma el origen O en el punto donde dicha superficie es cortada por el eje Oz de simetría, se tiene: para $z = 0$ y $r = 0$, $p = p_0$. Luego, sustituyendo en p, $C = p_0$, o sea finalmente para la distribución de presiones

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\,\rho\,\omega^2 r^2 - \rho g z.$$

En estas condiciones la superficie libre del líquido, definido por $p = p_0$ resultará una superficie de ecuación

$$z = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{g}\,r^2,$$

esto es, una *parábola* de vértice en O y de eje vertical.

Ejemplo 3:

Un recipiente que baja por un plano inclinado, tal como se indica, es acelerado, con una aceleración $a = 6$ m/seg².

Encontrar la inclinación permanente θ de la superficie libre con respecto a la horizontal. Se partirá de la ecuación de Euler, con $\alpha = 35°$.

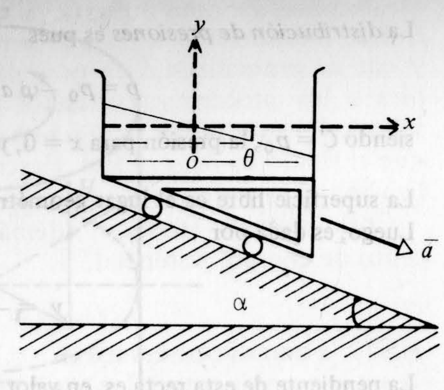


Figura 4.6.

Tómense unos ejes como los indicados en la propia figura del enunciado. Entonces la aceleración se puede escribir

$$\overline{a} = a_x\,\overline{i} + a_y\,\overline{j} = a\cos\alpha\,\overline{i} - a\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\overline{j},$$

esto es

$$a_x = a\cos\alpha, \quad a_y = -a\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

Ecuación de Euler. De su expresión vectorial

$$\overline{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \overline{f}$$

se tiene

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho\, a_x$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho\,(g + a_y).$$

De la primera ecuación, integrando

$$p = -\rho\, a_x\, x + f(y),$$

y llevando este resultado en la segunda

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{df}{dy} = -\rho\,(g + a_y)$$

de donde

$$f = -\rho\,(g + a_y)\,y + C$$

La *distribución de presiones* es pues

$$p = p_0 - \rho\, a_x\, x - \rho\,(g + a_y)\, y$$

siendo $C = p_0$, la presión para $x = 0, y = 0$.

La superficie libre es el lugar geométrico de los puntos en los cuales $p = p_0$. Luego, es dada por

$$y = -\frac{a_x}{g + a_y}\, x.$$

La pendiente de esta recta es, en valor absoluto, $tg\,\theta$, luego

$$tg\,\theta = \frac{a_x}{g + a_y} = \frac{a \cos\alpha}{g - a \operatorname{sen}\alpha}$$

En el caso de $\alpha = 35°$, se tiene $tg\ \theta = 0.772,\ \theta = 37°.6$.

Nota: Hay maneras más breves de encontrar $tg\,\theta$.

EJERCICIOS

1. El envase de un fluido es trasladado en línea recta con aceleración constante, conjuntamente con su contenido. Tomando los ejes tal como se indican, escribir las ecuaciones cartesianas de la ecuación de Euler, partiendo de su enunciado vectorial. Integrar las ecuaciones encontradas y verificar así los resultados del ejemplo del texto. Mostrar que la superficie libre es perpendicular al vector $-\bar{a} + \bar{G}$. ¿Porqué?

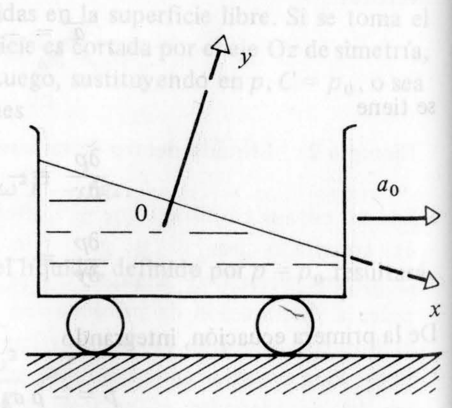


Figura 4.7.

2. Un cilindro circular de radio R que contiene *aire* gira alrededor de su eje vertical con una velocidad angular ω constante. Debido a la simetría de rotación se utilizan las coordenadas z y r. Encontrar la presión en un punto cualquiera M del gas sabiendo que en el punto 0, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, en los siguientes dos casos: a) Cuando ρ es constante. b) cuando ρ varía pero la temperatura se mantiene constante.

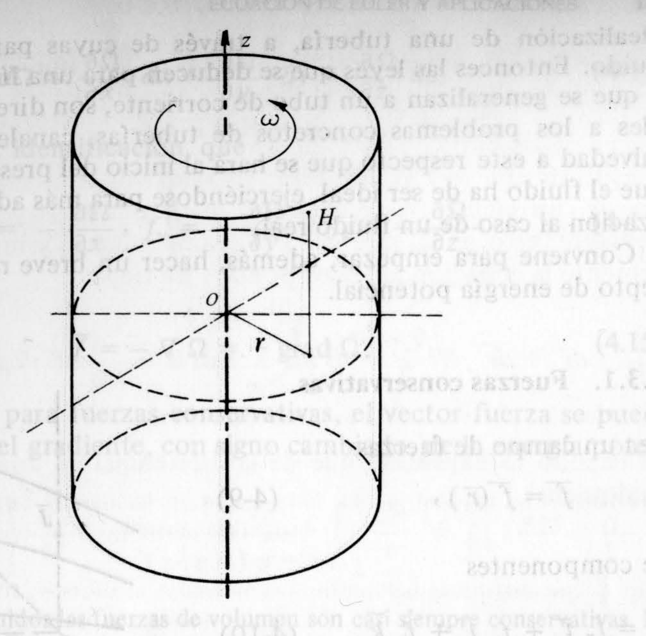


Figura 4.8.

Respuesta: a) $p = -\rho g z + \frac{1}{2}\rho\, r^2 \omega^2 + p_0$; b) $p = p_0\, e^{\frac{\rho_0}{p_0}\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz\right)}$

4.3. Flujo unidimensional. Teorema de Bernoulli

Al estudiar la cinemática de los fluidos se ha visto cómo su movimiento podía describirse mediante el concepto de líneas de corriente y cómo el conocimiento de éstas permitía determinar el campo de velocidades en la mayoría de los casos. Cabe entonces preguntarse si, además, no se podría también averiguar la variación de la presión a lo largo de una línea de corriente. Aparte del interés físico general que una respuesta a esta pregunta puede tener para el conocimiento del movimiento de los fluidos, su importancia práctica es también muy grande. En efecto los conceptos de línea de corriente y de *tubo de corriente* sirven como *modelos* para el estudio del flujo en tuberías y otros conductos utilizados en la técnica: un tubo de corriente no es en realidad otra cosa sino la

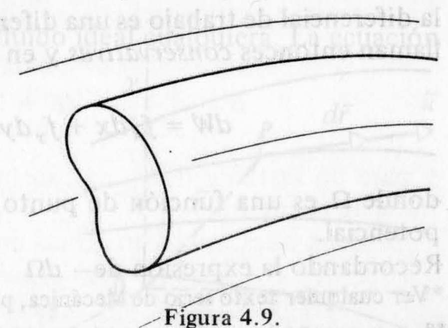


Figura 4.9.

idealización de una tubería, a través de cuyas paredes no pasa el fluido. Entonces las leyes que se deducen para una línea de corriente, y que se generalizan a un tubo de corriente, son directamente aplicables a los problemas concretos de tuberías, canales, etc. La única salvedad a este respecto que se hará al inicio del presente capítulo, es que el fluido ha de ser ideal, ejerciéndose para más adelante la generalización al caso de un fluido real.

Conviene para empezar, además, hacer un breve recuento del concepto de energía potencial.

4.3.1. Fuerzas conservativas

Sea un campo de fuerzas

$$\overline{f} = \overline{f}(\overline{r}), \qquad (4\text{-}9)$$

de componentes

$$\overline{f} = f_x\ \overline{i} + f_y\ \overline{j} + f_z\ \overline{k} \qquad (4\text{-}10)$$

Figura 4.10.

El trabajo elemental de esta fuerza cuando su punto de aplicación se desplaza en $d\overline{r}$ es dado por

$$dW = \overline{f}\ .\ d\overline{r} = f_x\,dx + f_y dy + f_z dz. \qquad (4\text{-}11)$$

En caso en que el campo de fuerzas cumpla con la condición

$$\text{Rot}\ \overline{f} = 0, \qquad (4\text{-}12)$$

la diferencial de trabajo es una diferencial total exacta.* Las fuerzas se llaman entonces *conservativas* y en este caso se puede escribir

$$dW = f_x dx + f_y dy + f_z dz = -\,d\,\Omega \qquad (4\text{-}13)$$

donde Ω es una función de punto, $\Omega = \Omega\,(x, y, z)$, llamada energía potencial.

Recordando la expresión de $d\Omega$

*Ver cualquier texto serio de Mecánica, por ejemplo J. León, MECANICA, Limusa.

$$d\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}\,dz, \qquad (4\text{-}14)$$

se concluye, por identificación, que

$$f_x = -\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,,\ f_y = -\frac{\partial\Omega}{\partial y}\,,\ f_z = -\frac{\partial\Omega}{\partial z} \qquad (4\text{-}15)$$

o sea

$$\overline{f} = -\,\nabla\,\Omega = -\,\text{grad}\,\Omega\,. \qquad (4.15)$$

Se ve pues que para fuerzas conservativas, el vector fuerza se puede expresar como el gradiente, con signo cambiado, de la energía potencial.

Ejemplo:

En mecánica de fluidos las fuerzas de volumen son casi siempre conservativas. En particular cuando $\overline{G}$, de la ecuación de Euler, se origina por la gravitación terrestre, supuesta constante, se tiene un campo de fuerzas conservativo, el de gravedad.

Si se aplican las definiciones anteriores y se considera $\overline{G} = -g\overline{j}$ como una fuerza por unidad de masa, se puede escribir, con el eje $0y$ vertical

$$dW = -\,g\,dy = -\,d\,\Omega,$$

de donde

$$\Omega = gy + C. \qquad (4\text{-}16)$$

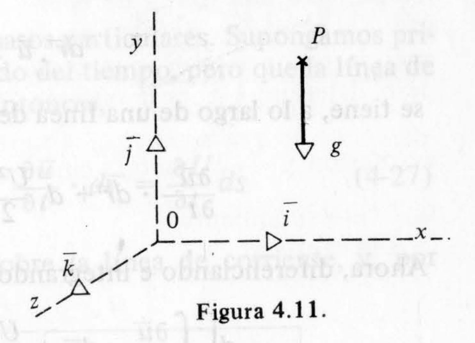


Figura 4.11.

4.3.2. Teorema de Bernoulli

Considérese ahora el flujo de un fluido ideal cualquiera. La ecuación básica del movimiento es la de Euler, que se escribirá, suponiendo que las fuerzas de volumen son conservativas:

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial t} + u\cdot\nabla\,\overline{u} = -\,\frac{1}{\rho}\,\nabla p - \nabla\Omega \qquad (4\text{-}17)$$

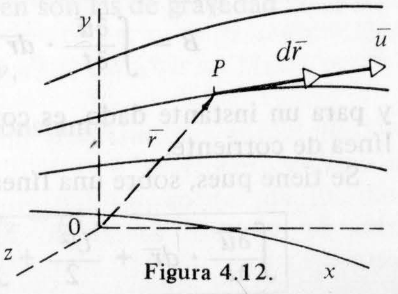


Figura 4.12.

Esta ecuación se escribe también (Ejerc. 5, Secc. 3-7)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \frac{U^2}{2} - \bar{u} \times \text{Rot}\, \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Omega \tag{4-18}$$

Sea $d\bar{r}$ un elemento de longitud medido a lo largo de una *línea de corriente,* esto es tal que $d\bar{r}$ y $\bar{u}$ sean paralelos, y multiplíquese escalarmente la ecuación anterior por $d\bar{r}$. Se tiene

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot d\bar{r} + d\bar{r} \cdot \nabla \frac{U^2}{2} - d\bar{r} \cdot \bar{u} \times \text{Rot}\, \bar{u} = -\frac{1}{\rho} d\bar{r} \cdot \nabla p - d\bar{r} \cdot \nabla \Omega \tag{4-19}$$

Utilizando la expresión que da la diferencial de una función escalar cualquiera

$$\varphi = \varphi(x, y, z),$$

$$d\varphi = d\bar{r} \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \tag{4-20}$$

y observando que el término

$$d\bar{r} \cdot \bar{u} \times \text{Rot}\, \bar{u} = 0, \tag{4-21}$$

se tiene, a lo largo de una línea de corriente

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot d\bar{r} + d\, \frac{U^2}{2} + \frac{dp}{\rho} + d\,\Omega = 0. \tag{4-22}$$

Ahora, diferenciando e integrando a la vez

$$d\left[\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \cdot d\bar{r} + \frac{U^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega\right] = 0. \tag{4-23}$$

La expresión entre corchetes se llama "bernoulliano"

$$B = \int \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot d\bar{r} + \frac{U^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega, \tag{4-24}$$

y para un instante dado, es constante sobre todos los puntos de una línea de corriente.

Se tiene pues, sobre una línea de corriente

$$\boxed{\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot d\bar{r} + \frac{U^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega = B = \text{“constante”}} \tag{4-25}$$

ésta es la forma general de la *ecuación de Bernoulli.* Si el flujo no es permanente la "constante" B puede en realidad, ser función del tiempo: $B = B(t)$.

La ecuación de Bernoulli puede expresarse en forma distinta cuando se hacen intervenir dos puntos dados sobre una misma línea de corriente.

Partiendo de (4.22), se tiene entonces

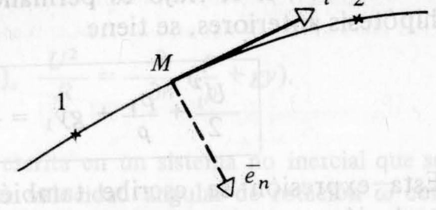


Figura 4.13.

$$\int_1^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot d\bar{r} + \int_1^2 d\, \frac{U^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \int_1^2 d\,\Omega = 0,$$

de donde

$$\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot d\bar{r} + \frac{U_2^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \Omega_2 = \frac{U_1^2}{2} + \Omega_1 \tag{4-26}$$

Conviene ahora considerar varios casos particulares. Supongamos primero que el flujo sigue dependiendo del tiempo, pero que la línea de corriente mantiene fija su *forma.* Entonces,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \bar{e}_t \quad \text{y} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \cdot d\bar{r} = \frac{\partial U}{\partial t} ds \tag{4-27}$$

siendo ds el elemento de arco sobre la línea de corriente, y, por consiguiente,

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} ds + \frac{U_1^2}{2} + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \Omega_2 = \frac{U^2}{2} + \Omega_1} \tag{4-28}$$

Por otra parte, si las fuerzas de volumen son las de gravedad

$$\Omega = gy,$$

y si además el fluido es de densidad constante,

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1),$$

la ecuación de Bernoulli se escribe

$$\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds + \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g y_2 = \frac{U_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g y_1 \qquad (4\text{-}29)$$

Finalmente, si el flujo es permanente o estacionario, además de las hipótesis anteriores, se tiene

$$\frac{U_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g y_1 = \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g y_2 \qquad (4\text{-}30)$$

Esta expresión se escribe también a menudo, por su fácil interpretación

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + y_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2 \qquad (4\text{-}31)$$

En efecto, una interpretación física de esta última ecuación se logra cuando se observa que cada uno de los sumandos corresponde a una forma de energía mecánica: Así y es la energía potencial por unidad de peso del fluido, $\frac{p}{\gamma}$ es la energía de presión y $\frac{U^2}{2g}$ la energía cinética correspondiente.

Energá total
Altura piezométrica
$\frac{U_1^2}{2g}$
$\frac{U_2^2}{2g}$
$\frac{p_1}{\gamma}$
$\frac{p_2}{\gamma}$
U_1
U_2
P_1
P_2
y_1
y_2
Línea corriente
Nivel de referencia

Figura 4.14.

A la cantidad

$$H = y + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}, \qquad (4\text{-}32)$$

se le llama *energía (mecánica) total* o también "*carga*" y, si se la representa gráficamente, se tiene la línea de energía total. Esta línea es horizontal en el caso presente, esto es, para un fluido ideal.

A la cantidad

$$h_p = y + \frac{p}{\gamma}$$

se llama *altura piezométrica*. Su representación da lugar a la línea de alturas piezométricas.

Estos conceptos resultan muy útiles en las aplicaciones del teorema de Bernoulli al cálculo de tuberías, como se verá en todo el resto del curso.

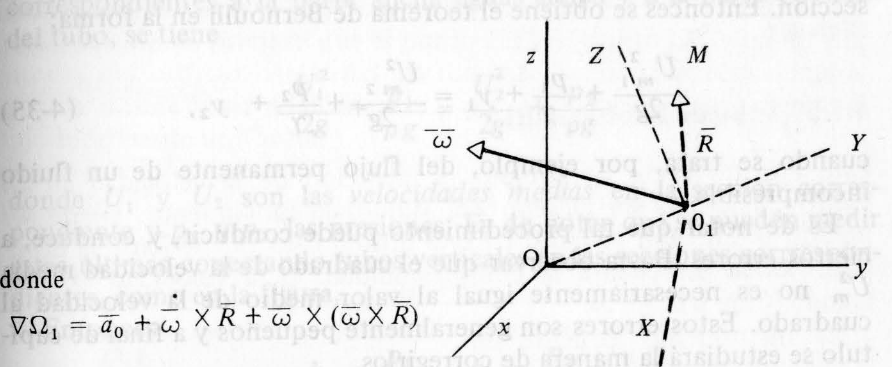
Ejercicios

1. Recordando la expresión de las componentes de la aceleración según la tangente y la normal a la trayectoria de un elemento de fluido, escribir las ecuaciones de Euler en un sistema intrínseco de coordenadas ligado a la línea de corriente, en el caso del flujo permanente de un fluido incompresible. ¿Qué ocurre si el flujo no es permanente?

Respuesta: $\frac{\partial}{\partial s}\frac{U^2}{2} = -\frac{\partial}{\partial s}(\frac{p}{\rho} + gy)$, $\frac{U^2}{R} = -\frac{\partial}{\partial n}(\frac{p}{\rho} + gy)$.

2. Mostrar que la ecuación de Euler escrita en un sistema no inercial que se traslada con una aceleración a_0 y una velocidad angular de rotación $\overline{\omega}$ con respecto a un sistema de referencia fijo, toma la forma

$$\frac{D\overline{U}}{Dt} + \nabla\left(\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega + \Omega_1\right) = -2\,\overline{\omega} \times \overline{U} + \overline{U} \times \nabla \times \overline{U},$$



donde

$$\nabla\Omega_1 = \overline{a}_0 + \dot{\overline{\omega}} \times \overline{R} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{R})$$

y D/Dt indica la derivación con respecto al sistema de coordenadas relativo, siendo $\overline{R}$ el vector de posición con respecto a dicho sistema.

4.4 Aplicaciones

Las aplicaciones del teorema de Bernoulli que aquí se indicarán están limitadas por la hipótesis de que el fluido es ideal, esto es no viscoso y no conductor del calor. En una sección posterior se presentarán las generalizaciones necesarias cuando se quiere estudiar un fluido real, y los métodos de cálculo correspondientes.

Una de las aplicaciones técnicas más importantes del teorema de Bernoulli es su uso en el cálculo de tuberías. El paso del teorema de Bernoulli deducido para una línea de corriente al caso de una tubería se puede hacer, como se dijo, mediante el concepto de *tubo de corriente*.

Para ello se aplica la ecuación (4-26) o alguna de sus consecuencias, no al valor de la velocidad, presión, etc. en una línea, sino a los valores promedios de estas magnitudes en cada sección del tubo de corriente. Esto es, se calcula, o se supone sabida, la velocidad media

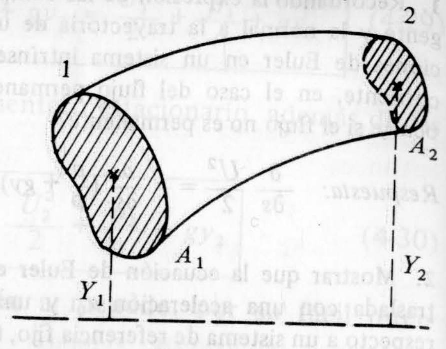


Figura 4.15.

$$U_m = \frac{1}{A}\int_{(A)} \bar{u}\cdot d\bar{A}, \qquad (4\text{-}34)$$

en la sección; se supone que en dicha sección la densidad y la presión son constantes y se toma por elevación la del centroide de la sección. Entonces se obtiene el teorema de Bernoulli en la forma:

$$\frac{U_{m\,1}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + y_1 = \frac{U_{m\,2}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2, \qquad (4\text{-}35)$$

cuando se trata, por ejemplo, del flujo permanente de un fluido incompresible.

Es de notar que tal procedimiento puede conducir, y conduce, a ciertos errores. Basta observar que el cuadrado de la velocidad media U_m^2 no es necesariamente igual al valor medio de la velocidad al cuadrado. Estos errores son generalmente pequeños y a final de capítulo se estudiará la manera de corregirlos.

Mientras tanto se utilizará el método descrito en varios ejemplos de aplicación.

4.5 Aplicaciones en flujo permanente

Las aplicaciones del teorema de Bernoulli al flujo permanente en tuberías son numerosas. En particular este teorema explica el funcionamiento de ciertos aparatos de medición, como el tubo de Venturi o el tubo de Pitot. Aun cuando una teoría completa estos instrumentos debe tomar en cuenta las pérdidas debidas a la viscosidad del fluido, cosa que se hará más adelante, el principio y las fórmulas fundamentales se pueden establecer suponiendo un fluido ideal.

4.5.a. Tubo de Venturi

Este es un aparato que se incluye en una tubería, montado en serie con ella, con el objeto de medir el caudal del flujo que circula. Consiste simplemente de una tubería estrangulada, en la forma que se indica. Si se aplica el teorema de Bernoulli entre los puntos 1 y 2 correspondientes a la parte ancha aguas arriba y a la parte estrecha del tubo, se tiene

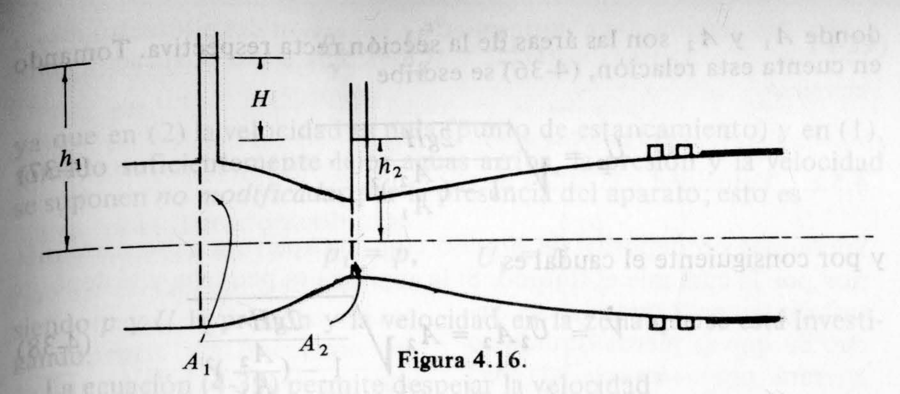


Figura 4.16.

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g}$$

donde U_1 y U_2 son las *velocidades medias* en la sección correspondiente y p_1 y p_2 las presiones. Es de notar que se pueden medir estas últimas conectando tubos verticales en las secciones correspondientes, como en la figura.

Entonces

$$h_1 = \frac{p_1}{\gamma}, \quad h_2 = \frac{p_2}{\gamma}$$

ya que en la dirección vertical no hay movimiento, y que, por consiguiente se puede aplicar la ley de la hidroestática. Se ve pues que

$$h_1 - h_2 = H = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

representa la diferencia de presiones entre los puntos 1 y 2. Luego la ecuación de Bernoulli permite escribir

$$\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = H. \qquad (4\text{-}36)$$

Puesto que no se conocen las velocidades, ya que no son directamente observables, la ecuación anterior contiene todavía dos incógnitas. Para relacionarlas se emplea la ecuación de continuidad.

$$U_1 A_1 = U_2 A_2,$$

donde A_1 y A_2 son las áreas de la sección recta respectiva. Tomando en cuenta esta relación, (4-36) se escribe

$$U_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1 - (\frac{A_2}{A_1})^2}}\,, \qquad (4\text{-}37)$$

y por consiguiente el caudal es

$$\dot{V} = U_2 A_2 = A_2 \sqrt{\frac{2gH}{1 - (\frac{A_2}{A_1})^2}} \qquad (4\text{-}38)$$

Esta relación resulta naturalmente modificada si el método de medir las presiones es distinto (ver ejercicios) y si el fluido es un gas en vez de un líquido. El método sin embargo es el mismo, quedando entendido que las correcciones debidas a la viscosidad se harán más adelante.

4.5.b Tubo de Pitot-Prandtl

Este aparato tiene por objeto la medición de la velocidad en *un punto* cualquiera en el seno del fluido en movimiento. Puede ser líquido o gas, aun cuando, en este último caso puede hacerse necesario tomar en cuenta la compresibilidad, si la velocidad es muy grande (Cap. 6).

El instrumento consiste en esencia de dos tubos concéntricos, uno de los cuales se abre de punta "contra" la velocidad del flujo y el otro, el exterior, tiene unas aperturas en su superficie lateral. Cada uno de ellos comunica con uno de los extremos de un piezómetro, tal como indica esquemáticamente la figura.

El tubo se coloca, como se dijo, de "punta" en contra del sentido del flujo y paralelamente a éste. Si se consideran dos puntos en el fluido, (1) y (2), y se aplica el teorema de Bernoulli entre ellos, se tiene

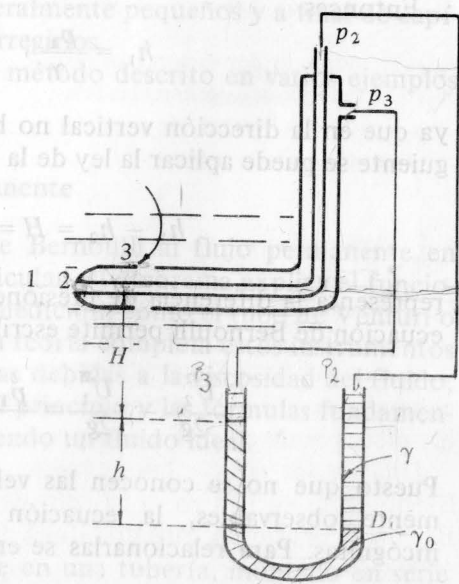


Figura 4.17.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma}\,, \qquad (4\text{-}39)$$

ya que en (2) la velocidad es nula (punto de estancamiento) y en (1), tomado suficientemente lejos aguas arriba, la presión y la velocidad se suponen *no modificadas* por la presencia del aparato; esto es

$$p_1 = p, \qquad U_1 = U\,,$$

siendo p y U la presión y la velocidad en la zona que se está investigando.

La ecuación (4-39) permite despejar la velocidad

$$U^2 = 2\,\frac{p_2 - p_1}{\rho}\,,$$

tan pronto se conozca la diferencia de presión $p_2 - p_1$. Para encontrarla, se observa primero que el punto (1) y el punto (3), situado a la entrada del orificio láteral del instrumento pueden ser considerados sobre la misma línea de corriente, y por consiguiente, suponiendo el flujo localmente uniforme.

$$p_1 = p = p_3$$

Luego

$$U^2 = 2\,\frac{p_2 - p_3}{\rho}\,.$$

Ahora bien, la diferencia de presiones $p_2 - p_3$ es detectada por el piezómetro, y se tiene

$$p_2 - p_3 = (\gamma_0 - \gamma)\,h$$

donde γ_0 es el peso específico de un fluido distinto del estudiado, (γ), y no miscible con él.

Combinando las dos ecuaciones anteriores

$$U = \sqrt{2gh\,(\frac{\gamma_0}{\gamma} - 1)}\,. \qquad (4\text{-}40)$$

Se ve pues que si el tamaño del *pitómetro* –como se llama a veces este instrumento–, es suficientemente pequeño para que la zona que rodea su parte activa pueda ser considerada localmente uniforme, se puede determinar la velocidad del fluido en esta zona.

La descripción dada corresponde a la versión del pitómetro ideada por Prandtl. Algunos sistemas más sencillos serán analizados como ejercicio.

4.5.c. Velocidad a la salida de un depósito

Supóngase un depósito de líquido con una apertura en su parte inferior por la cual sale el líquido. Si la apertura es pequeña y el depósito suficientemente grande, el hecho de que se pierde líquido no alterará prácticamente el nivel superior. De esta manera se tendrá un flujo permanente. También se puede asegurar esta permanencia alimentando convenientemente el depósito de manera que el nivel superior no varíe, cualquiera que sea el caudal. Se tiene entonces un *"depósito de nivel constante"*.

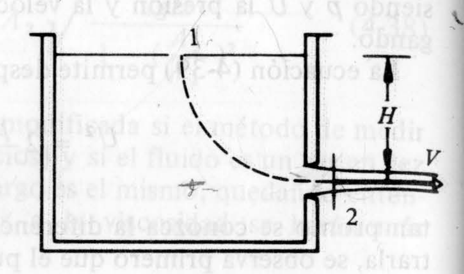


Figura 4.18.

Una primera pregunta que se puede hacer es de saber cuál es la velocidad del chorro de salida. *Suponiendo que el fluido es ideal,* se puede responder al aplicar el teorema de Bernoulli entre el punto (1) en la superficie del depósito y el punto (2) a la salida.

En efecto se tiene

$$H + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{U^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma}.$$

Ahora bien, en un chorro libre la presión en el interior del chorro es la misma que la circundante.[1] De no ser así, éste no sería "estable". Luego en el presente caso

$$p_1 = p_2$$

y por consiguiente

$$U_i = \sqrt{2\,gH}. \qquad (4\text{-}41)$$

Este resultado es el llamado *teorema de Toricelli.* Se ha indicado la velocidad con el índice i para recordar que el valor encontrado es correcto si el fluido es ideal. Más adelante se estudia lo que pasa en un fluido viscoso.

Otra pregunta que cabría hacer, es saber cual es el *tamaño* del chorro. Se observa en efecto que su diámetro es generalmente *menor* que el diámetro del orificio de salida.

Este es el llamado *fenómeno de contracción* y se lo puede apreciar fácilmente a simple vista. La magnitud de la contracción depende fundamentalmente del tipo de orificio que da salida al chorro de fluido.

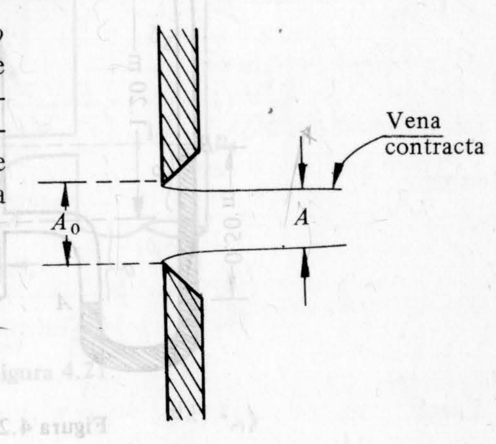


Figura 4.19.

Por esta razón se define el coeficiente de contracción

$$C_c = \frac{A}{A_0}, \qquad (4\text{-}42)$$

que caracteriza cada orificio en particular. Algunos valores usuales de C_c se indican en la figura 4-32. Cabe mencionar aquí que para ciertas configuraciones de salida se ha logrado calcular los coeficientes de contracción en forma teórica, basándose en la teoría de los fluidos ideales. En otros casos su determinación se ha podido hacer tan sólo experimentalmente.

Conocido C_i, el tamaño del chorro es

$$A = C_c\,A_0. \qquad (4\text{-}43)$$

Ejemplo 1:

En un tubo vertical con cambio de sección, circula gasolina de peso específico relativo 0.82. Usando la indicación del piezómetro de mercurio, (de peso específico relativo 13.6), que se encuentra instalado como indica el dibujo, se pregunta cuál es el caudal de gasolina en la tubería. Se despreciarán todas las pérdidas.

[1] Una excepción importante es la del chorro supersónico (Cap. 7).

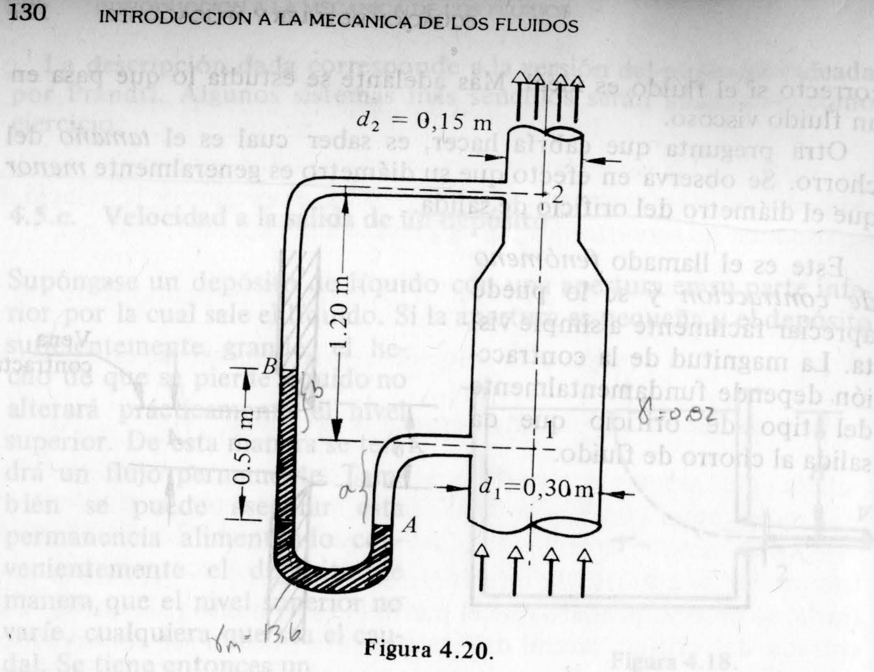


Figura 4.20.

Solución:

Escribamos la ecuación de Bernoulli entre los puntos (1) y (2).

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma_g} + y_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma_g} + y_2$$

Las velocidades están relacionadas entre sí por la ecuación de continuidad

$$U_1 A_1 = U_2 A_2$$

En cuanto a las presiones, interesa calcular la expresión

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_g},$$

que aparece en la ecuación de Bernoulli, y que ha de ser evaluada en función de la lectura del piezómetro.

De la ecuación de la hidrostática se puede escribir

$$p_B = p_2 + \gamma_g (1{,}20 - b)$$

$$p_A = p_1 + \gamma_g a$$

$$p_A - p_B = p_1 - p_2 + \gamma_g a - \gamma_g (1.20 - b)$$

$$= p_1 - p_2 - \gamma_g \times 1.20 + \gamma_g (a + b)$$

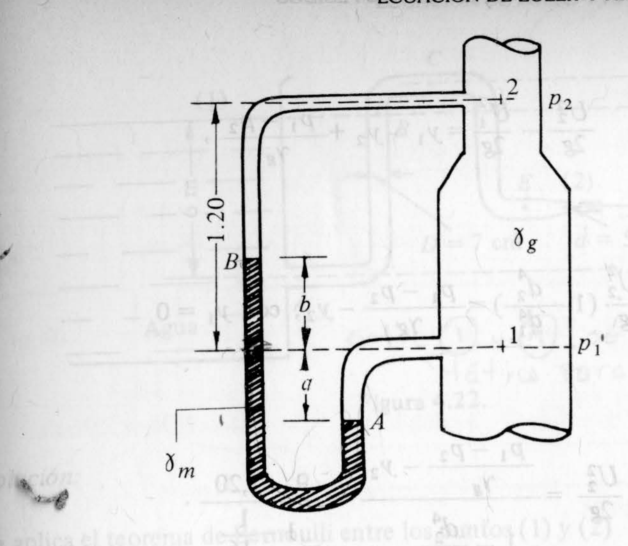


Figura 4.21.

Ahora bien,

$$p_A - p_B = \gamma_m (a + b) = 0{,}50\, \gamma_m$$

Luego se despeja

$$p_1 - p_2 = 0.5\, \gamma_m + 1.20\, \gamma_g - 0{,}5\, \gamma_g$$

$$= 0.5\, \gamma_m + 0.7\, \gamma_g$$

Por consiguiente

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma_g} = 0{,}5 \frac{\gamma_m}{\gamma_g} + 0.70 = 0{,}5 \frac{13.6}{0.82} + 0.70$$

$$= 8{,}3 + 0.7 = 9.0 \text{ m.}$$

De la ecuación de Bernoulli se puede ahora despejar una de las velocidades, utilizando la ecuación anterior y la de continuidad.

De esta última

$$U_1 = U_2 \frac{A_2}{A_1} = U_2 \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

luego, como

$$\frac{U_2^2}{2g} - \frac{U_1^2}{2g} = y_1 - y_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma_g},$$

se tiene

$$\frac{U_2^2}{2g}\left(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}\right) = \frac{p_1 - p_2}{\gamma g} - y_2, \text{ con } y_1 = 0$$

o sea

$$\frac{U_2^2}{2g} = \frac{\dfrac{p_1 - p_2}{\gamma_g} - y_2}{1 - \dfrac{d_2^4}{d_1^4}} = \frac{9 - 1{,}20}{1 - \dfrac{1}{16}}.$$

Luego

$$U_2^2 = 2 \times 9{,}8 \times \frac{16}{15} \times 7{,}80 = 163 \frac{\text{m}^2}{\text{seg}^2}$$

de donde

$$U_2 = 12{,}75 \frac{\text{m}}{\text{seg}}.$$

El caudal es pues

$$V = 12{,}75 \times \frac{\pi}{4} \times 0.15^2 = 0.225 \frac{\text{m}^3}{\text{seg}}$$

$$V = 225 \frac{\text{lts}}{\text{seg}}.$$

Ejemplo 2:

1. Despreciando todas las pérdidas, calcular el caudal en la tubería indicada y las presiones en los puntos A, B, C, E.

Unidades a usar:
Caudal: m^3/seg
Presiones: $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2$

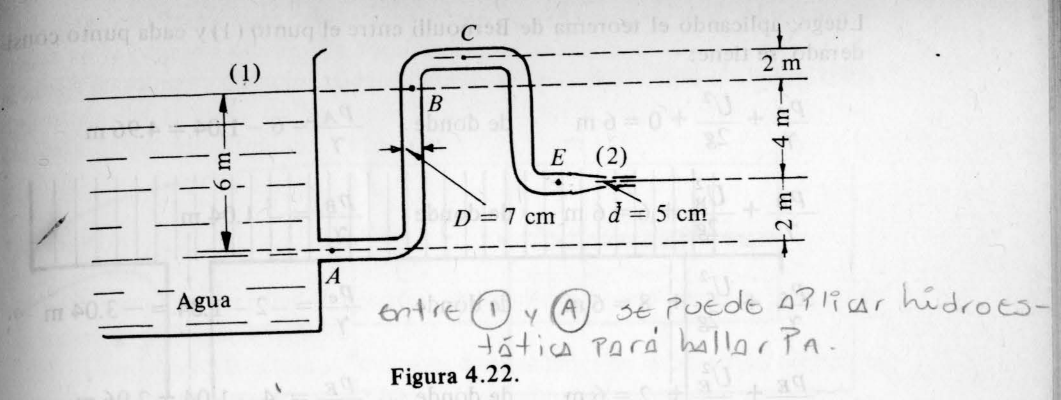


Figura 4.22.

Solución:

Se aplica el teorema de Bernoulli entre los puntos (1) y (2)

$$\frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2 = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + y_1$$

donde y_1, y_2 tienen por origen la cota de punto A. Por consiguiente

$$y_1 = 6\text{m}, \; y_2 = 2 \text{ m. Además } U_1 = 0, \text{ y } p_1 = p_2 = p_a.$$

De la ecuación anterior se saca pues

$$U_2 = \sqrt{2g\,(y_1 - y_2)} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 4} = 8{,}85 \text{ m/seg.}$$

De la ecuación de continuidad

$$A\,U = A_2\,U_2$$

donde $A = \frac{\pi}{4} D^2$ y $A_2 = \frac{\pi}{4} d^2$. Además, U es la velocidad en el tubo.

Por consiguiente,

$$U = U_2 \frac{A_2}{A} = U_2 \frac{d^2}{D^2} = 8.85 \times \frac{5^2}{7^2} = 452 \text{ m/seg.}$$

Caudal: Conocida U_2 se tiene

$$\dot{V} = \frac{\pi}{4} d^2 U = \frac{\pi}{4} (0{,}05)^2 \times 8{,}85 = 0.0174 \text{ m}^3/\text{seg} = 17{,}4 \text{ lts/seg.}$$

Presiones. Conocida U_2 se calcula $\frac{U^2}{2g} = 1.04$ m

Luego, aplicando el teorema de Bernoulli entre el punto (1) y cada punto considerado, se tiene:

$$\frac{p_A}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} + 0 = 6 \text{ m} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{p_A}{\gamma} = 6 - 1.04 = 4.96 \text{ m}$$

$$\frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} + 6 = 6 \text{ m} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{p_B}{\gamma} = -\ 1.04 \text{ m}$$

$$\frac{p_c}{\gamma} + \frac{U_c^2}{2g} + 8 = 6 \text{ m} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{p_c}{\gamma} = -2 - 1.04 = -\ 3.04 \text{ m}$$

$$\frac{p_E}{\gamma} + \frac{U_E^2}{2g} + 2 = 6 \text{ m} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{p_E}{\gamma} = 4 - 1.04 = 2.96 \text{ m.}$$

Las presiones son, pues,

$$p_A = 4.96 \times 9800 = 48608 \text{ N/m}^2 = 0.49 \text{ bar}$$

$$p_B = -\ 1.04 \times 9800 = -\ 0.102 \text{ bar}$$

$$p_C = -\ 3.04 \times 9800 = -\ 0.290 \text{ bar}$$

$$p_E = 2.96 \times 9800 = +\ 0.29 \text{ bar.}$$

Efecto de sifón. En el punto C la presión manométrica es negativa. La razón física de ello es naturalmente que el punto C se encuentra más alto que el nivel de energía total. Esto es lo que se llama efecto de sifón: el líquido continuará a fluir siempre que no se vaporice, esto es, siempre que su presión absoluta no esté por debajo de su presión de vapor a la temperatura del fenómeno.

En el presente caso,

$$p_{aC} = 1.013 - 0.290 = 0.723 \text{ bar}$$

mientras que, suponiendo una temperatura de 30°C, la presión de vapor es

$$p_v = 0.0424 \text{ bar.}$$

Por consiguiente el *efecto de sifón* se produce y los cálculos hechos son correctos.

Diagramas de energía total y de altura piezométrica

En la página siguiente se indican esquemáticamente las líneas de energía total y de altura piezométrica, que han sido trazadas suponiendo, como en el problema, que todas las pérdidas son despreciables.

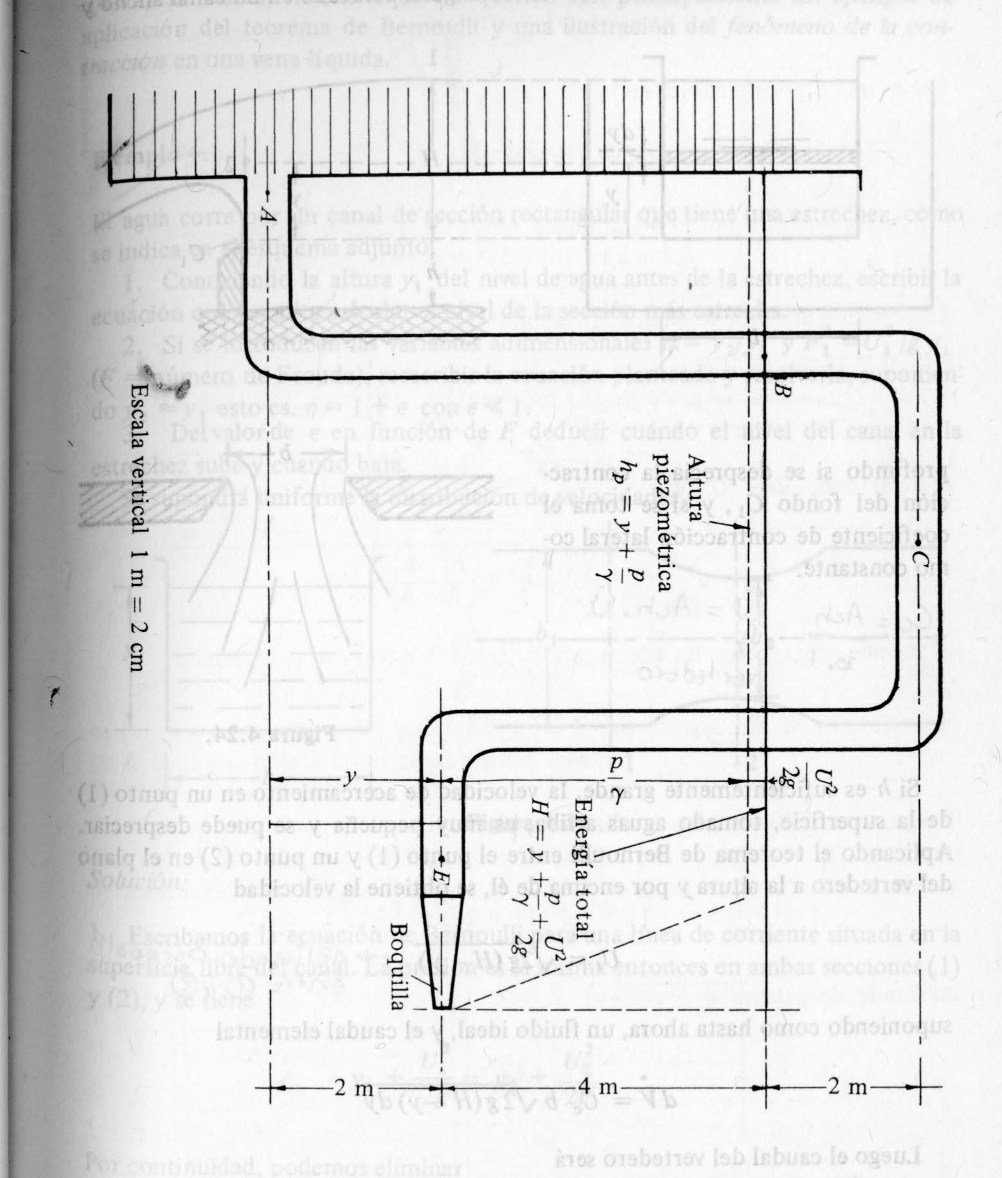
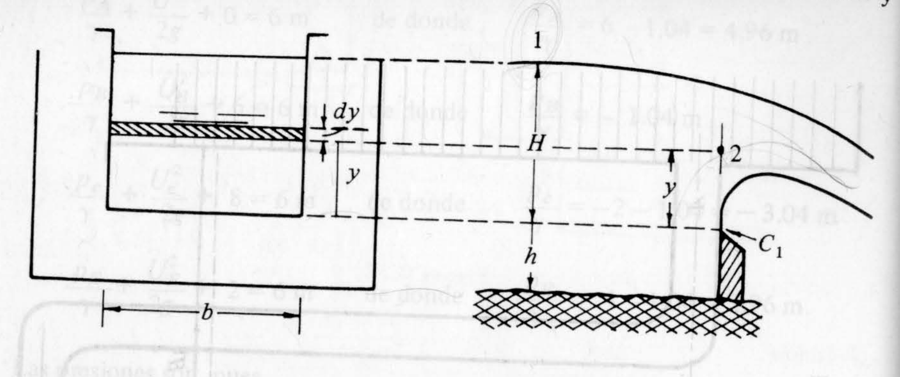


Figura 4.23.

Ejemplo 3:

Determinar el caudal sobre un vertedero rectangular colocado en un canal ancho y



profundo si se desprecia la contracción del fondo C_1, y si se toma el coeficiente de contracción lateral como constante.

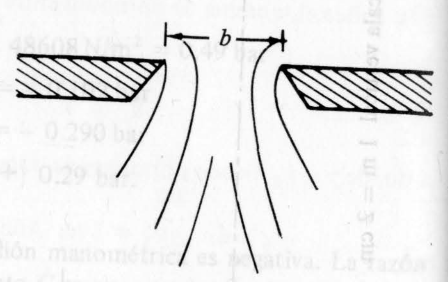


Figura 4.24.

Si h es suficientemente grande, la velocidad de acercamiento en un punto (1) de la superficie, tomado aguas arriba, es muy pequeña y se puede despreciar. Aplicando el teorema de Bernoulli entre el punto (1) y un punto (2) en el plano del vertedero a la altura y por encima de él, se obtiene la velocidad

$$U_i = \sqrt{2g\,(H-y)}$$

suponiendo como hasta ahora, un fluido ideal, y el caudal elemental

$$d\dot{V} = C_c\; b\,\sqrt{2\,g\,(H-y)}\;dy$$

Luego el caudal del vertedero será

$$\dot{V} = C_c\;b\int_o^H 2g\,(H-y)^{1/2}\,dy = \frac{2}{3}\;C_c\,b\;\sqrt{2g}\;\;H^{3/2} \qquad (4\text{-}44)$$

Este resultado indica la utilidad de los vertederos como *instrumentos de medición:* Bastará medir H para obtener el caudal que pasa por ellos. Cabe subrayar

que, para un fluido real, habría lugar a una corrección adicional de la cual se habla en la próxima sección. La fórmula a emplear será pues, no la (4-44) sino la (4-52) El calculo hecho aquí ha querido ser, principalmente un ejemplo de aplicación del teorema de Bernoulli y una ilustración del *fenómeno de la contracción* en una vena líquida.

Ejemplo 4:

El agua corre por un canal de sección rectangular que tiene una estrechez, como se indica en el esquema adjunto.

1. Conociendo la altura y_1 del nivel de agua antes de la estrechez, escribir la ecuación que permita calcular el nivel de la sección más estrecha.
2. Si se introducen las variables adimensionales $\eta = y_2/y_1$ y $F_1^2 = U_1^2/g\,y_1$ (F = número de Froude), reescribir la ecuación planteada y resolverla, suponiendo $y_2 \approx y_1$ esto es, $\eta = 1 + \epsilon$ con $\epsilon \ll 1$.
3. Del valor de ϵ en función de F deducir cuándo el nivel del canal en la estrechez sube y cuando baja.

Se supondrá uniforme la distribución de velocidades.

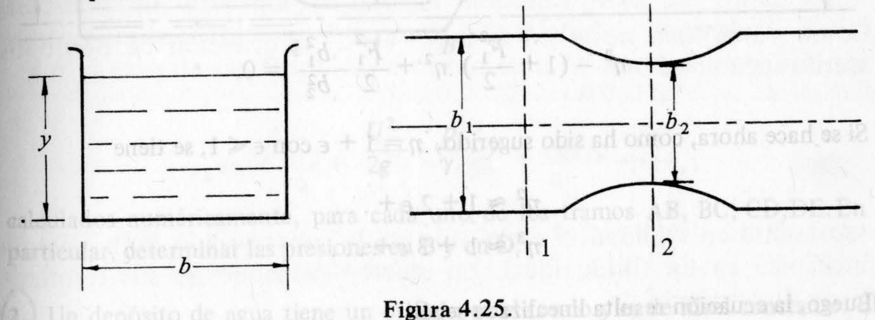


Figura 4.25.

Solución:

1. Escribamos la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente situada en la superficie libre del canal. La presión es la misma entonces en ambas secciones (1) y (2), y se tiene

$$y_1 + \frac{U_1^2}{2g} = y_2 + \frac{U_2^2}{2g}\,.$$

Por continuidad, podemos eliminar

$$U_2 = U_1\,\frac{b_1 y_1}{b_2 y_2}$$

o sea,

$$y_1 + \frac{U^2}{2g} = y_2 + \frac{U_1^2}{2g}\;\frac{b_1^2\,y_1^2}{b_2^2\,y_2^2}$$

de donde

$$y_2^3 - \left(y_1 + \frac{U_1^2}{2g}\right) y_2^2 + \frac{U_1^2}{2g}\frac{b_1^2}{b_2^2}\, y_1^2 = 0$$

que es una ecuación cúbica en y_2.

2. Introduzcamos la variable adimensional

$$\eta = \frac{y_2}{y_1} .$$

La ecuación anterior se escribe, dividiendo por y_1^3

$$\eta^3 - \left(1 + \frac{V_1^2}{2\,gy_1}\right)\eta^2 + \frac{U_1^2}{2gy_1}\frac{b_1^2}{b_2^2} = 0,$$

es decir, con, $F = U^2/gy$,

$$\eta^3 - \left(1 + \frac{F_1^2}{2}\right)\eta^2 + \frac{F_1^2}{2}\frac{b_1^2}{b_2^2} = 0.$$

Si se hace ahora, como ha sido sugerido, $\eta = 1 + \epsilon$ con $\epsilon \ll 1$, se tiene

$$\eta^2 \approx 1 + 2\,\epsilon + \ldots$$

$$\eta^3 \approx 1 + 3\,\epsilon + \ldots$$

Luego, la ecuación resulta linealizada según

$$(1 + 3\,\epsilon) - \left(1 + \frac{F_1^2}{2}\right)(1 + 2\epsilon) + \frac{F_1^2}{2}\frac{b_1^2}{b_2^2} = 0,$$

de donde, despejando ϵ, se obtiene

$$\epsilon = \frac{\frac{F_1^2}{2}\left(\frac{b_1^2}{b_2^2} - 1\right)}{F_1^2 - 1} .$$

3. **Discusión**:

Como

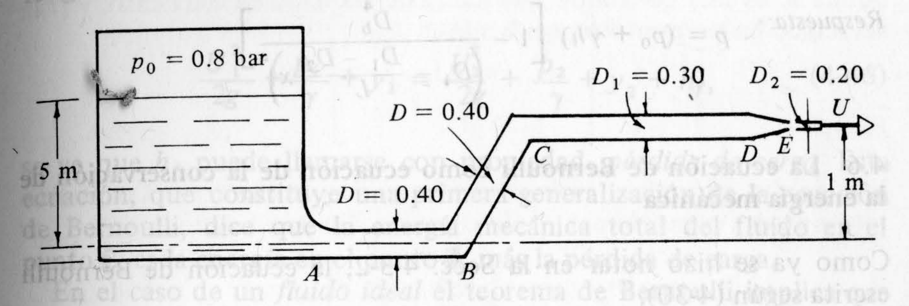
$$\frac{b_1}{b_2} > 1$$

se presentan las dos posibilidades:

Si $F_1 > 1$, se concluye que $\epsilon > 0$, lo cual significa físicamente que el nivel *sube* en la zona angosta del canal; si $F_1 < 1$ se concluye que $\epsilon < 0$, esto es, el nivel en la zona angosta *baja*.

Ejercicios

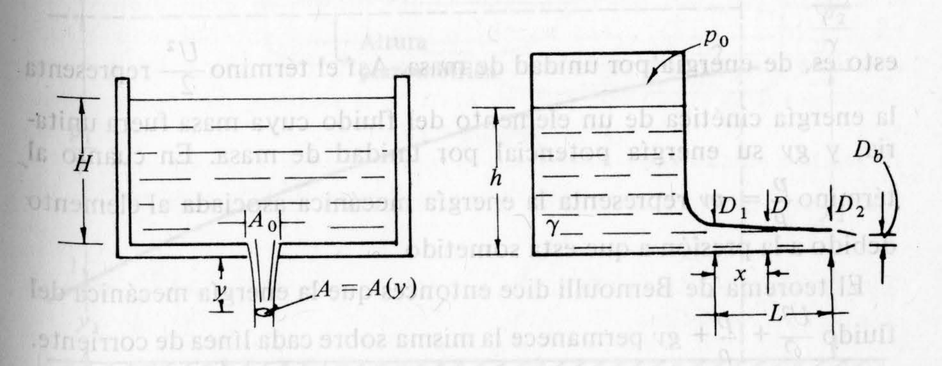
1. Despreciando las pérdidas, hacer un diagrama de la línea de energía total y de la altura piezométrica, que muestre los tres sumandos



$$\frac{U^2}{2g}\ ,\ \frac{p}{\gamma}\ ,\ y$$

calculados numéricamente, para cada uno de los tramos AB, BC, CD, DE. En particular, determinar las presiones en B y en D.

2. Un depósito de agua tiene un orificio en el fondo y es de nivel constante. El área del chorro que sale del tanque es inicialmente A_0, (para $y = 0$). Si el nivel de agua en el depósito es H, se pide el área A de la sección recta del chorro en



función de y, si se desprecian los efectos secundarios como la fricción y la tensión superficial.

Respuesta:
$$A_0 \sqrt{\frac{H}{H+y}}$$

3. Deduzca una expresión para la presión a lo largo del tubo que sale del depósito indicado, de nivel constante, sabiendo que su diámetro varía linealmente del valor D_1 a D_2, y despreciando las pérdidas. El extremo del tubo tiene una boquilla con un diámetro de salida D_b.

Respuesta:
$$p = (p_0 + \gamma h)\left[1 - \frac{D_b^4}{\left(D_1 - \frac{D_1 - D_2}{L}x\right)^4}\right]$$

4.6 La ecuación de Bernoulli como ecuación de la conservación de la energía mecánica

Como ya se hizo notar en la Secc. 4-3-2, la ecuación de Bernoulli escrita según (4-30),

$$\frac{U_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gy_1 = \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gy_2,$$

representa en realidad el enunciado de la conservación de la energía mecánica en un fluido ideal. En efecto, cada uno de sus términos tiene dimensiones de

$$\frac{\text{Joule}}{\text{kg}},$$

esto es, de energía por unidad de masa. Así el término $\frac{U^2}{2}$ representa la energía cinética de un elemento del fluido cuya masa fuera unitaria, y gy su energía potencial por unidad de masa. En cuanto al término $\frac{p}{\rho} = pv$ representa la energía mecánica asociada al elemento debido a la presión a que está sometido.

El teorema de Bernoulli dice entonces que la energía mecánica del fluido $\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy$ permanece la misma sobre cada línea de corriente.

Esta interpretación tiene una importancia práctica considerable pues permite generalizar el teorema al caso de un fluido viscoso. En

efecto, la presencia de la viscosidad produce una pérdida de la energía mecánica, según se ha hecho notar en (1-19), la cual se transforma en calor.

Bien se puede por consiguiente, escribir para un fluido real que

$$\frac{U_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g\,y_1 = \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g\,y_2 + g\,h_f. \qquad (4\text{-}45)$$

donde gh_f representaría la pérdida de energía por unidad de masa de fluido, debido a la *fricción viscosa.* Las dimensiones de h_f son las de longitud, y escribiendo el teorema de Bernoulli según

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + y_1 = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2 + h_f, \qquad (4\text{-}46)$$

se ve que h_f puede llamarse con propiedad, *pérdida de carga.* Esta ecuación, que constituye una primera generalización de la ecuación de Bernoulli, dice que la energía mecánica total del fluido en el punto 1, es la energía en el punto 2, más la pérdida de carga.

En el caso de un *fluido ideal* el teorema de Bernoulli implica que

$$H = y + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} = \text{const.},$$

es decir que la línea de energía mecánica total es horizontal, como indica el dibujo de la página 4-19.

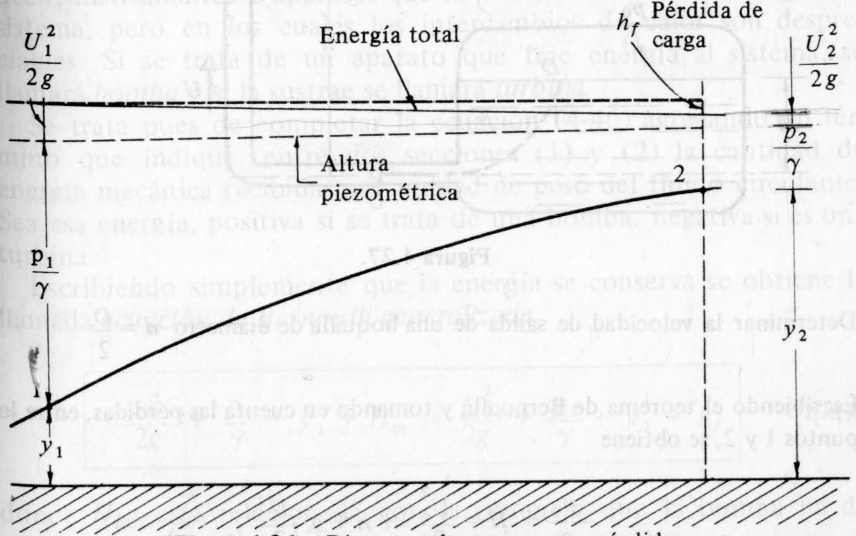


Figura 4.26. Diagrama de cargas, con pérdidas.

Si el fluido es viscoso, en cambio, la línea mencionada es inclinada, debido a las pérdidas de carga.

En esta breve introducción al caso de un fluido viscoso, queda un punto por aclarar. El valor de h_f es función de muchos factores. Su determinación completa será estudiada en el Capítulo 10. Basta señalar por ahora que, se puede expresar h_f en forma simplificada mediante

$$h_f = K \frac{U^2}{2g}, \qquad (4\text{-}47)$$

donde K es una constante que habrá de ser dada en cada caso, y U la velocidad en un punto especificado.

Ejemplo:

Un depósito subterráneo suple agua bajo presión constante p_0. Las pérdidas totales pueden expresarse por

$$K \frac{U^2}{2g}.$$

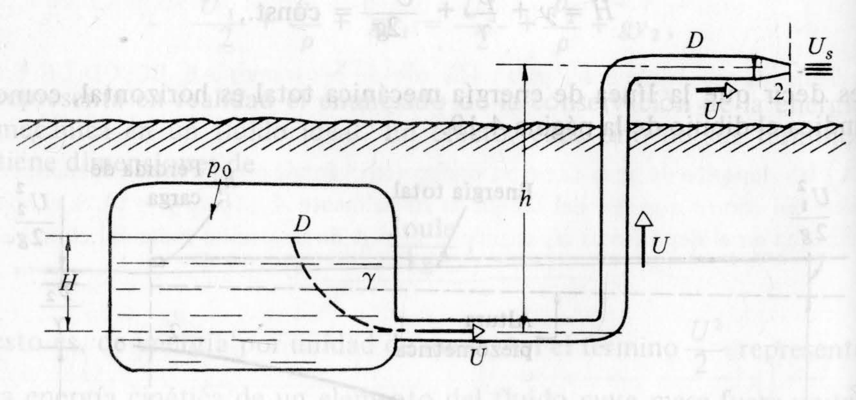


Figura 4.27.

Determinar la velocidad de salida de una boquilla de diámetro $d = \dfrac{D}{2}$

Escribiendo el teorema de Bernoulli, y tomando en cuenta las pérdidas, entre los puntos 1 y 2, se obtiene

$$\frac{p_0}{\gamma} + H = \frac{U_s^2}{2g} + h + K \frac{U^2}{2g},$$

pero por la ecuación de continuidad

$$\frac{\pi}{4} D^2 U = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^2 U_s,$$

se puede escribir

$$U = \frac{U_s}{4}.$$

Luego, sustituyendo U y despejando U_s

$$U_s = \left[\frac{2g\left(\dfrac{p_0}{\gamma} + H - h\right)}{1 + \dfrac{K}{16}} \right]^{1/2}.$$

4.7 Ecuación de Bernoulli generalizada

La ecuación de Bernoulli considerada como expresión de la ley de conservación de la energía, puede ser generalizada en varias otras direcciones. En el Capítulo 11 se estudiará la primera Ley de la Termodinámica para un sistema abierto como máxima expresión de esa ley.

En esta sección se contemplarán los casos particulares, muy frecuentes en hidráulica, en que la tubería tiene elementos activos, es decir, instrumentos o aparatos que suministran o sustraen energía del sistema, pero en los cuales los intercambios de calor son despreciables. Si se trata de un aparato que trae energía al sistema, se llamará *bomba* y si la sustrae se llamará *turbina.*

Se trata pues de completar la ecuación (4-46) agregando un término que indique, entre dos secciones (1) y (2) la cantidad de energía mecánica recibida, por unidad de peso del fluido circulante. Sea esa energía, positiva si se trata de una bomba, negativa si es una turbina.

Escribiendo simplemente que la energía se conserva se obtiene la llamada *ecuación de Bernoulli generalizada.*

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + y_1 + H_m = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2 + h_f \qquad (4\text{-}48)$$

donde H_m está relacionada con la *potencia* que la bomba ha de suministrar al fluido, mediante la expresión

$$\dot{W}_m = \gamma\ \dot{V} H_m = \rho\ \dot{V} H_m g = \dot{m} H_m\ g \tag{4-49}$$

Es de observar que H_m tiene dimensiones de longitud. Se la puede interpretar, en efecto, como el aumento brusco de nivel de la *línea de energía total* en el punto en que está ubicada la bomba.

Si se trata de una bomba efectivamente, *de eficiencia* η, la potencia mecánica que ésta habrá de desarrollar será pues

$$P = \frac{\dot{W}}{\eta} = \frac{\gamma\ \dot{V}\ H_m}{\eta} \tag{4-50}$$

Si se trata de una turbina con un rendimiento η', la potencia mecánica que podrá suplir será dada por

$$P' = \eta'\ \gamma\ \dot{V} H_m. \tag{4-51}$$

Estas ecuaciones permiten resolver los problemas referentes a sistemas hidráulicos activos más frecuentes en la práctica, como se ilustra mediante los ejemplos que siguen.

Ejemplo:

En la instalación indicada, calcular la potencia que ha de tener la bomba, instalada como se indica, si ella tiene una eficiencia de 0.75 y ha de suplir un caudal de 20 lts/seg., siendo el líquido una gasolina de peso específico relativo 0.68. Se admitirá que las pérdidas en la tubería, codos, llave, etc., equivalen a una constante $K = 9.22$.

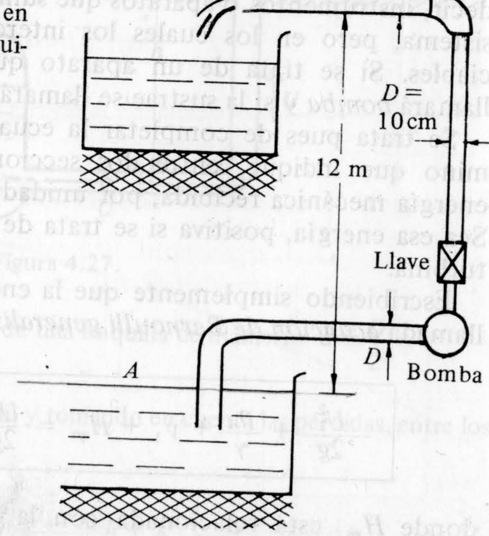


Figura 4.28.

Aplicando el teorema de Bernoulli generalizado, tenemos

$$H_m + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} + y_A = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} + y_B + h_f$$

donde

$$h_f = K\frac{U^2}{2g}$$

y donde

$$p_A = p_B, y_A = 0,\ U_A = 0$$

La sección del tubo es

$$A = \frac{\pi}{4} \times (0.10)^2 = 0.785 \times 10^{-2} = 0.00785\ \text{m}^2$$

Luego, la velocidad

$$U = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{0.020}{0.00785} = 2.55\ \text{m/seg.}$$

El teorema de Bernoulli se escribe entonces

$$H_m = y_B + \frac{U_B^2}{2g} + K\frac{U^2}{2g}$$

$$= 12 + (1 + 9.22)(2.55)^2/2 \times 9.8 = 12 + (10.22 \times 0.333) = 15.4\ \text{m.}$$

Por consiguiente, la potencia que el fluido necesita recibir para circular en las condiciones dadas es

$$\dot{W} = \rho g \dot{V} H_m = 1000 \times 0.68 \times 9.8 \times 0.020 \times 15.4$$

$$= 2050\ W = 2.05\ Kw.$$

Potencia nominal que ha de tener la bomba,

$$P = \frac{\dot{W}}{\eta} = \frac{2.05}{0.75} = 2.74\ Kw.$$

Ejemplo:

Calcúlese la potencia que debe tener la bomba del sistema que se muestra para que trabaje en las condiciones indicadas, con una eficiencia del 80%.

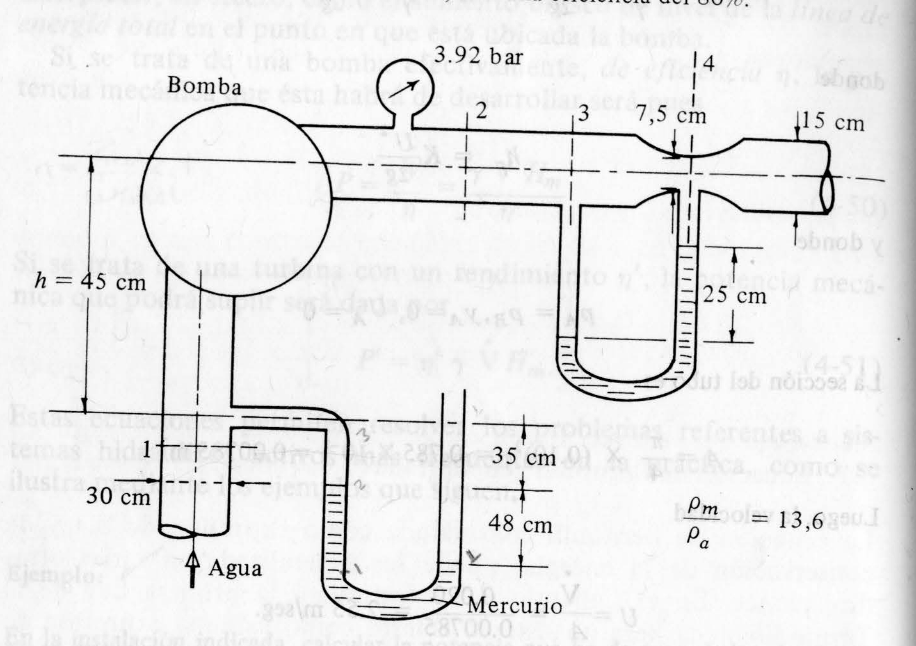


Figura 4.29.

Se determinará primero el *caudal*. Para ello se utilizarán las indicaciones del tubo de Venturi conectado al sistema. Por las leyes de la hidrostática se deduce que

$$p_3 - p_4 = H \rho_a g \left(\frac{\rho_m}{\rho_a} - 1\right)$$

Aplicando ahora el teorema de Bernoulli entre los puntos (3) y (4), se obtiene

$$\frac{p_3}{\gamma_a} + \frac{U_3^2}{2g} = \frac{p_4}{\gamma_a} + \frac{U_4^2}{2g}$$

de donde

$$\frac{p_3 - p_4}{\gamma_a} = \frac{U_4^2 - U_3^2}{2g} = H \left(\frac{\rho_m}{\rho_a} - 1\right)$$

o sea

$$U_4^2 - U_3^2 = 2gH \left(\frac{\rho_m}{\rho_a} - 1\right).$$

Figura 4.30.

Aplicando la ecuación de continuidad, se deduce finalmente

$$U_3^2 = 2gH \frac{\rho_m/\rho_a - 1}{D^2/d^2 - 1}$$

y con los valores numéricos dados se obtiene la velocidad,

$$U_3 = 4.55 \text{ m/seg.}$$

De donde, el caudal

$$\dot{V}_3 = \frac{\pi}{4} D^2 U_3 = 0.0802 \text{ m}^3/\text{seg.}$$

Para determinar la potencia necesaria, se aplica ahora el teorema de Bernoulli generalizado. De acuerdo con los datos no se tomarán en cuenta las pérdidas, excepto dentro de la propia bomba, y entonces están incluidas en el valor de la eficiencia. Se tiene pues

$$H_m + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + h$$

El valor de U_1 se calcula inmediatamente por continuidad

$$U_1 = U_2 (0.15)^2/(0.30)^2 = 1.135 \text{ m/seg.}$$

Falta calcular p_1 puesto que p_2 es dada directamente por la lectura de manómetro. Utilizando la ecuación de la hidrostática, se tiene

$$p_1 = p_0 - 0.35\,\gamma_a - 0.48\,\gamma_m$$

de donde

$$\frac{p_1}{\gamma_a} = -(0.35 + 0.48 \times 13.6) = -6.88 \text{ m.}$$

El valor de H_m se obtiene de la ecuación de Bernoulli ya escrita

$$H_m = \frac{3.92 \times 10^5}{9800} + \frac{(4.55)^2}{19.6} + 0.45 + 6.88 - \frac{(1.135)^2}{19.6} = 48.32 \text{ m.}$$

Luego la potencia que la bomba ha de suministrar al fluido es de

$$\dot{W} = \gamma \dot{V} H_m = 9800 \times 0.0802 \times 48.32 = 37850\ w$$

y por consiguiente, tomando en cuenta la eficiencia, la potencia nominal de la bomba habrá de ser un valor no menor que

$$P = \frac{37.850}{0.8} = 47.4\,Kw$$

4.8 Flujo y pérdidas en orificios

El flujo en un chorro que sale por un orificio presenta características especiales, como ya se ha visto (pág. 4-29).

Además del fenómeno de la contracción, que condujo a la introducción del coeficiente de contracción C_c, el chorro de un *fluido viscoso* sufre pérdidas de energía al pasar por un orificio, pérdidas que dependen también de la forma de éste.

La manera más directa de medir estas pérdidas es de evaluar en cuanto se ha reducido la velocidad al atravesar el orificio, comparando el valor real U_r con el valor que tendría en el mismo punto la velocidad si el fluido fuera ideal. Se escribe entonces

$$U_r = C_v\ U_i, \tag{4-52}$$

donde C_v es el coeficiente de velocidad.

Los valores de C_c y C_v para algunos orificios se indican a continuación.

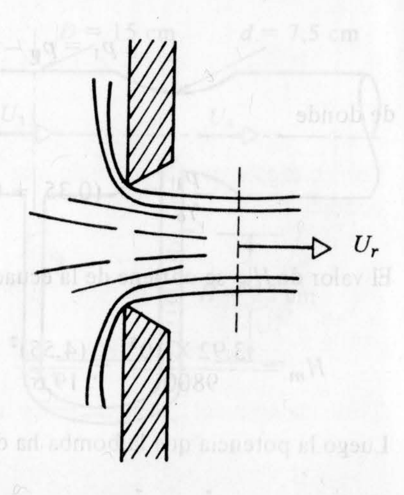


Figura 4.31.

A_0

Orificio de arista aguda
$C_c = 0{,}61$
$C_v = 0{,}98$

A_0

Orificio redondeado
$C_c = 1.0$
$C_v = 0{,}98$

Pared ancha
$C_c = 1.0$
$C_v = 0.82$

Boquilla de borda
$C_c = 0.5$
$C_v = 0.75$

Figura 4.32.

Por otra parte, las pérdidas en un orificio pueden también expresarse en términos de la velocidad real de salida U_r por, (4-47)

$$h_f = K \frac{U_r^2}{2g} \qquad (4\text{-}53)$$

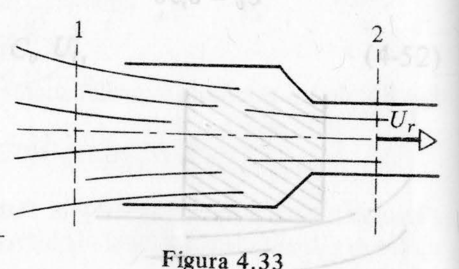
Esta expresión tiene la ventaja de hacer intervenir las cantidades técnicamente más interesantes. Existen tablas de valores de K para distintos orificios. Como K representa a fin de cuentas, pérdidas por fricción, lo mismo que C_v, es claro que estos dos coeficientes están relacionados entre sí.

Relación entre K y C_v

Se hará una deducción lo más general posible suponiendo que aguas arriba del orificio hay un sistema conductor cualquiera (depósito, otro tubo, etc.), con una altura total dada.

$$H_1 = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + y_1$$

En términos del líquido real se expresa la ecuación de Bernoulli generalizada por



$$H_1 = \frac{U_r^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2 + K\frac{U_r^2}{2g}$$

Figura 4.33

En términos de la velocidad U_i que tendría el fluido si fuese ideal, se puede expresar la misma ecuación por.

$$H_1 = \frac{U_i^2}{2g} + y_2 + \frac{p_2}{\gamma} = \frac{U_r^2}{C_v^2 2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2,$$

donde se ha usado (4-52).
Comparando estos resultados se obtiene, con $y_1 = y_2$,

$$1 + K = \frac{1}{C_v^2} \qquad (4\text{-}54)$$

que es la relación buscada.

Caudal por un orificio o boquilla

Como lo indican los esquemas de la figura 4-32, cuando un chorro de fluido real sale por un orificio o una boquilla, se producen simultáneamente pérdidas por fricción y una contracción del chorro. El caudal que sale es

$$\text{V} = U_r A = C_c C_v U_i A_0$$

$$= C_d U_i A_0 ,$$

donde tanto U_r como U_i son los valores medios de la velocidad en el chorro, y C_d es el llamado coeficiente de caudal o de *descarga*,

$$\boxed{C_d = C_c\, C_v} \qquad (4\text{-}55)$$

Figura 4.34.

Ejemplo 1:

Un depósito de nivel constante se vacía por un orificio conectado tal como se indica. Calcular la velocidad a la salida, conociendo el coeficiente de velocidad 0.87. Calcular también el caudal si el coeficiente de contracción es 0.95.

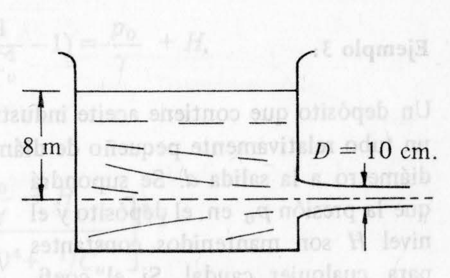


Figura 4.35.

Si $H = 8$ m, aplicando el teorema de Bernoulli como si el fluido fuera ideal, se tiene (Toricelli)

$$U_i = \sqrt{2\,g\,H}$$

Luego la velocidad de salida es

$$U = C_v\ \sqrt{2gH} = 0.87\ \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 8} = 10.9 \text{ m/seg.}$$

El caudal será dado por

$$\text{V} = \frac{\pi}{4} D^2 C_c\ U = C_c C_v \frac{\pi}{4} D^2\ \sqrt{2gH}$$

$$= 0.95 \times \frac{\pi}{4} (0{,}10)^2 \times 10.9 = 0{,}0865 \text{ m}^3/\text{seg} = 86.5 \text{ lts/seg.}$$

Ejemplo 2:

En el ejemplo 3 de la sección 4-5c (que trata de un *vertedero rectangular*), se calculó el caudal tomando el valor ideal de la velocidad

$$\sqrt{2g(H-y)}.$$

Si se toman en cuenta las pérdidas por viscosidad del fluido la velocidad será

$$u = C_v \sqrt{2g(H-y)}.$$

y por consiguiente, el caudal verdadero

$$\dot{V} = \frac{2}{3} C_v C_c b \sqrt{2g} H^{3/2}$$

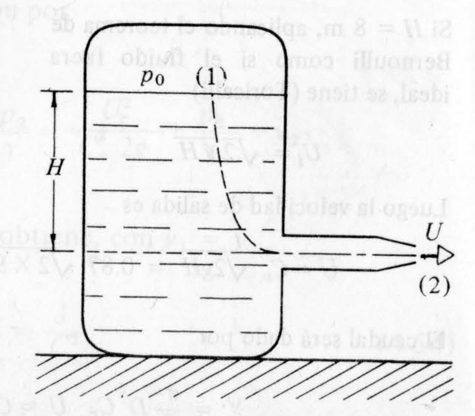
$$= \frac{2}{3} C_d \, b \sqrt{2g} \, H^{3/2} \tag{4-56}$$

Un valor aproximado de C_d para este caso es 0.62.

Ejemplo 3:

Un depósito que contiene aceite industrial a presión suministra aceite mediante un tubo relativamente pequeño de diámetro D, que termina en una boquilla de diámetro a la salida d. Se supondrá que la presión p_0 en el depósito y el nivel H son mantenidos constantes para cualquier caudal. Si el coeficiente de pérdida en el tubo, desde el depósito hasta la boquilla es K, y si la boquilla tiene un coeficiente de velocidad C_v y un coeficiente de contracción C_c, se pide:

a) Encontrar la velocidad del chorro a la salida y su energía cinética, por unidad de tiempo.



b) ¿Para qué valor de d es esa potencia máxima?

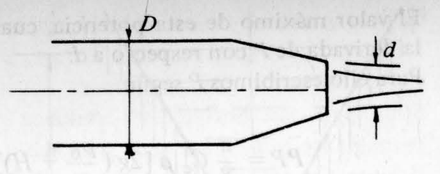


Figura 4.36.

Escribiendo el teorema de Bernoulli generalizado entre (1) y (2),

$$\frac{p_0}{\gamma} + H = \frac{U^2}{2g} + K\frac{U_t^2}{2g} + K_b \frac{U^2}{2g},$$

donde U_t es la velocidad en la tubería y K_b el coeficiente de pérdidas en la boquilla.

Aplicando la ecuación de continuidad

$$U_t = \frac{d^2}{D^2} U,$$

y la relación (4-54)

$$K_b = \frac{1}{C_v^2} - 1,$$

se puede despejar la velocidad del chorro

$$\frac{U^2}{2g}\left(1 + K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2} - 1\right) = \frac{p_0}{\gamma} + H,$$

o sea

$$U = \left[2g \frac{\frac{p_0}{\gamma} + H}{Kd^4/D^4 + 1/C_v^2} \right]^{1/2}$$

La energía cinética del chorro por unidad de tiempo se puede expresar como

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2}\dot{m}\,U^2 = \frac{1}{2}\rho U A U^2 = \frac{1}{2}\rho U^3 C_c \frac{\pi}{4} d^2 = P.$$

y en el presente caso vale

$$P = \frac{\pi}{4} C_c d^2 \frac{1}{2}\rho \left(2g \frac{\frac{p_0}{\gamma} + H}{K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2}} \right)^{3/2}$$

El valor máximo de esta potencia, cuando d varía, se obtendrá igualando a cero la derivada de P con respecto a d.
Para ello escribimos P según

$$PP = \frac{\pi}{8} C_c \, \rho \, [2g(\frac{p_0}{\gamma} + H)]^{3/2} \frac{d^2}{(k\, d^4/D^4 + \frac{1}{C_v^2})^{3/2}},$$

de donde se obtiene

$$\frac{dP}{dd} = \frac{\pi}{8} C_c \, \rho \left[2g\left(\frac{p_0}{\gamma}+H\right]^{3/2} \frac{2d\left(k\frac{d^4}{D^4}+\frac{1}{C_v^2}\right)^{3/2} - \frac{3}{2}d^2\left(k\frac{d^4}{D^4}+\frac{1}{C_v^2}\right)^{1/2} 4K\frac{d^3}{D^4}}{\left(k\frac{d^4}{D^4}+\frac{1}{C_v^2}\right)^3}$$

Igualando a cero el numerador de esta expresión, se obtiene

$$(K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2})^{3/2} = 3\frac{d^4}{D^4} K \, (K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2})^{1/2}$$

simplificando y despejando d se obtiene, finalmente,

$$K\frac{d^4}{D^4} + \frac{1}{C_v^2} = 3\frac{d^4}{D^4} \; K,$$

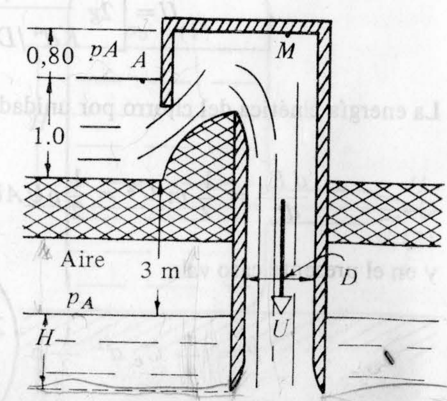
$$d = \frac{D}{\sqrt[4]{2KC_v^2}} \, .$$

Ejercicios

1. En el sifón que indica la figura se pregunta cuál es el caudal que circula, sabiendo que las pérdidas pueden expresarse como

$$1.27\,\frac{U^2}{2g}.$$

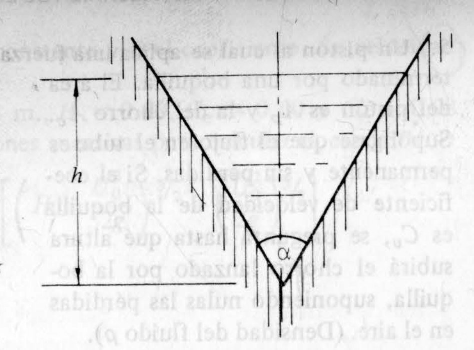
Si la velocidad en el punto M es $0.1\,U$, se pregunta cuál es la presión en dicho punto, admitiendo que las pérdidas en el tramo AM son el 15% de las pérdidas totales. H cualquiera, $D = 5$ cm.



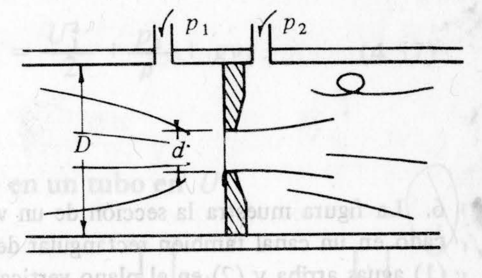
Respuesta: 11.5 lts/seg. −0.113 bar

2. En un vertedero triangular con un ángulo en el vértice α, se supone que el coeficiente de contracción no depende del nivel del líquido. Determinar entonces el caudal en volumen en función de h.

Respuesta: $\dot{V} = \frac{8}{15}\, C_d \; tg\, \frac{\alpha}{2} \sqrt{2\,g\,h^5}$



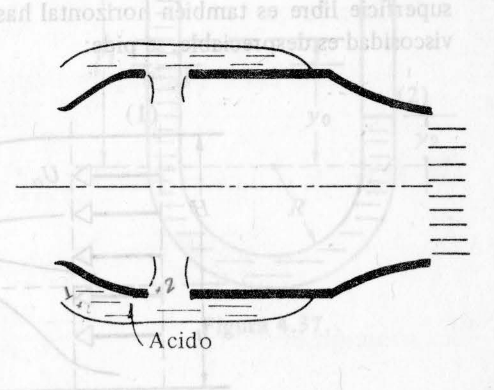
3. Un medidor de orificio consiste de un encogimiento brusco del diámetro de una tubería, tal como indica la figura. Si se miden las presiones antes (p_1), y después (p_2), del orificio, determinar el caudal que pasa por la tubería, en función de un coeficiente de caudal C_d, dado que D y d son conocidos.



Respuesta:

$$\dot{V} = C_d \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - \frac{d^4}{D^4}\right]}}$$

4. La cámara de combustión de un motor de cohete es alimentada con 250 Kg/seg. de ácido nítrico. Este ácido debe ser inyectado dentro de la cámara a través de 8 orificios de arista aguda colocados en anillo alrededor de la cámara y que son alimentados por un único tubo principal. La caída de presión a través de los orificios es de 6.5 bar. El peso específico relativo del ácido nítrico es 1.5 y se lo supone incompresible.



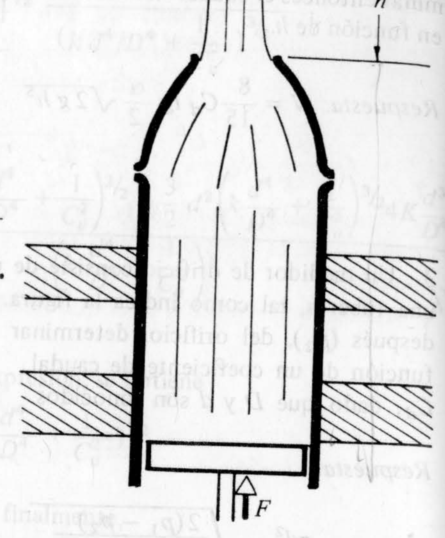
Encontrar:

a) El diámetro de los orificios y la velocidad de los chorros de ácido.
b) El diámetro que tendrían los orificios si la entrada fuera redondeada.

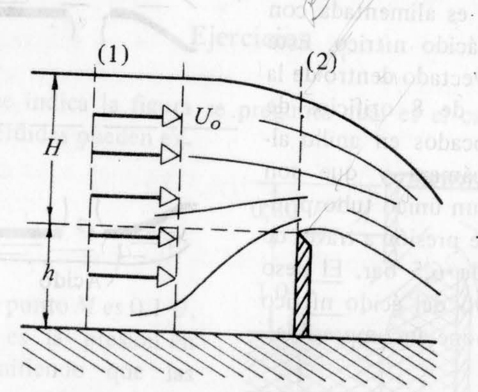
Respuesta: a) 3.66 cm.; 28.8 m/seg.; b) 2.86 cm.

5. Un pistón al cual se aplica una fuerza constante F actúa sobre un tubo corto terminado por una boquilla. El área del pistón es A_p y la del chorro A_c. Supóngase que el flujo en el tubo es permanente y sin pérdidas. Si el coeficiente de velocidad de la boquilla es C_v, se pregunta hasta qué altura subirá el chorro lanzado por la boquilla, suponiendo nulas las pérdidas en el aire. (Densidad del fluido ρ).

Respuesta: $h = \dfrac{F}{A_p \rho g \left[\dfrac{1}{C_v^2} - \left(\dfrac{A_c}{A_p}\right)^2\right]}$.



6. La figura muestra la sección de un vertedero rectangular de ancho b colocado en un canal también rectangular de ancho B. Se consideran las secciones (1) aguas arriba y (2) en el plano vertical del propio vertedero. Si se admite que en la sección (1) las líneas de corriente son paralelas y horizontales, que la superficie libre es también horizontal hasta la sección (2) y que el efecto de la viscosidad es despreciable, se pide:



a) Demostrar, partiendo de la ecuación de Euler, que la variación de presión en la sección (1) es hidrostática.

b) Admitiendo que la velocidad en la sección (1) es uniforme e igual a U_o, (velocidad de acercamiento), determinar el caudal V que fluye por el vertedero si el coeficiente de contratación C_c es constante y si el coeficiente de velocidad es C_v.

c) Si $b = 1$ m, $B = 4$ m., $h = 3$ m., $H = 0.60$, $C_c = 0.60$ y $C_v = 0.98$, desarrollar un método de aproximaciones sucesivas para calcular el caudal $\dot{V}$.

Respuesta: $\dot{V} = C_c C_v\, b\, \sqrt{2g}\, \dfrac{2}{3}\left[\left(H + \dfrac{U_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\dfrac{U_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$

*4.9 Flujo no permanente

El tema de flujo no permanente o variable se tratará con varios ejemplos de un fluido incompresible. Su propósito principal será el de darle mayor significado físico al primer término de la ecuación de Bernoulli escrita según (4-29):

$$\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds + \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g y_2 = \frac{U_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g y_1 \qquad (4.57)$$

4.9.1. Oscilaciones de un líquido en un tubo en *U*

Sea un tubo en U en el cual la parte curva es, por ejemplo, una semi-circunferencia de radio R, y sean

$$y_1 \text{ e } y_2$$

las alturas del líquido en cada una de las ramas, en un instante dado.

La posición de equilibrio es evidentemente

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

y la longitud total de la columna líquida

$$L = y_1 + y_2 + \pi R.$$

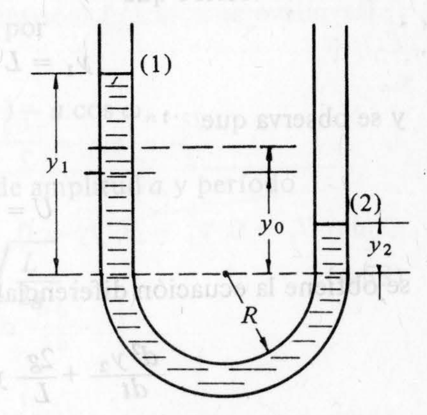


Figura 4.37.

Se va a aplicar la ecuación (4-57) entre los puntos (1) y (2) indicados. Como $U_1 = U_2$ y $p_1 = p_2$, se tiene

$$\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds + g\, y_2 = g\, y_1 .$$

Ahora bien, U es constante sobre toda la línea de corriente que une (1) y (2). Luego U es únicamente función del tiempo

$$U = U(t),$$

y no depende de s, la abscisa curvilínea tomada a lo largo de la línea de corriente mencionada. Dicho de otra manera, en la integral de la ecuación anterior $\frac{\partial U}{\partial t}$ es constante con respecto a s. Luego

$$\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds = \frac{dU}{dt} \int_1^2 ds = L\, \frac{dU}{dt},$$

y la ecuación resulta ser

$$\frac{dU}{dt} = \frac{g}{L}\,(y_1 - y_2).$$

Si ahora se escribe que

$$y_1 = L - \pi R - y_2 ,$$

y se observa que

$$U = \frac{dy_2}{dt} ,$$

se obtiene la ecuación diferencial, para y_2,

$$\frac{d^2 y_2}{dt} + \frac{2g}{L}\, y_2 = g\,(1 - \pi\, \frac{R}{L})$$

La solución es del tipo

$$y_2 = \frac{L}{2}\,(1 - \pi\, \frac{R}{L}) + A\ \operatorname{sen} \omega_n t + B\ \cos \omega_n t,$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

es la pulsación del movimiento oscilante.

Para determinar las constantes de integración deben especificarse unas *condiciones iniciales.* Por ejemplo, para $t = 0$, supóngase que

$$y_2 = y_0 - a; \quad \frac{dy_2}{dt} = 0, \quad \text{con } a < \frac{L - \pi R}{2} \quad \text{naturalmente.}$$

Entonces se obtiene $A = 0$,

y

$$y_0 - a = \frac{L}{2}\,(1 - \pi\, \frac{R}{L}) + B,$$

o sea

$$\frac{L - \pi R}{2} - a = \frac{L - \pi R}{2} + B,$$

de donde

$$B = -a.$$

El movimiento queda, pues, definido por

$$y_2 = \frac{L}{2}\,(1 - \pi\, \frac{R}{L}) - a \cos \omega_n t .$$

Se trata de un movimiento oscilante de amplitud a y período

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}} . \tag{4-58}$$

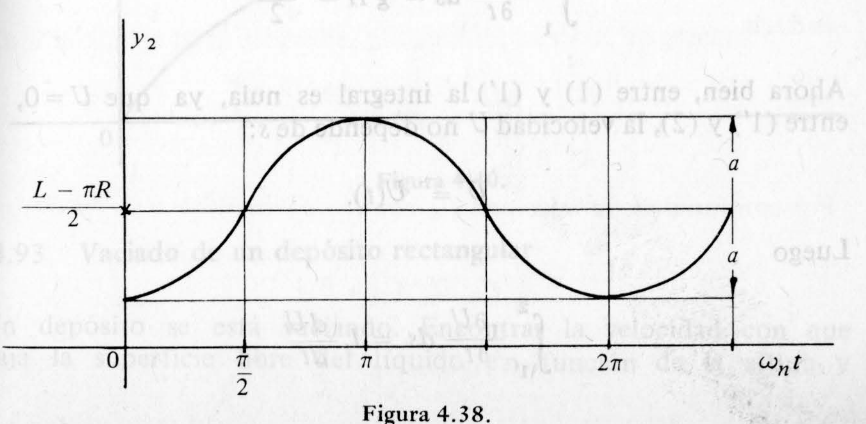


Figura 4.38.

4.9.2 Apertura de una llave en una tubería

Sea una tubería de diámetro constante D y longitud L, que está conectada a un depósito de nivel constante H.

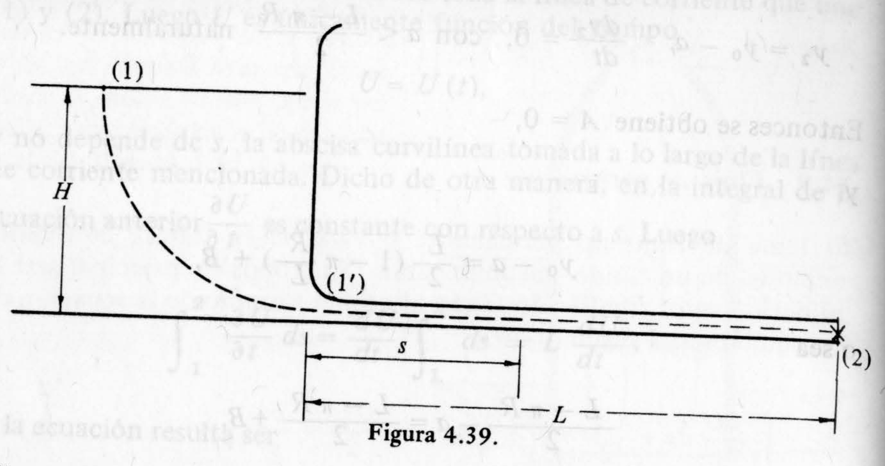


Figura 4.39.

Si se abre bruscamente la llave conectada en el extremo de la tubería y se desprecia la velocidad del fluido dentro del depósito, así como las pérdidas por fricción, se pide encontrar la velocidad de salida en función del tiempo.

De nuevo se aplica el teorema de Bernoulli entre los puntos (1) y (2)

$$\frac{U_1^2}{2} + gy_1 = \frac{U_2^2}{2} + gy_2 + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds$$

Como $U_1 = 0$, $y_1 = H$, $y_2 = 0$, $U_2 = U$, se puede escribir

$$\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds = g\,H - \frac{U^2}{2}$$

Ahora bien, entre (1) y (1') la integral es nula, ya que $U = 0$, y entre (1') y (2), la velocidad U no depende de s:

$$U = U(t).$$

Luego

$$\int_{1'}^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds = L\,\frac{dU}{dt}$$

y la ecuación es

$$L\,\frac{dU}{dt} = g\,H\,(1 - \frac{U^2}{2gH})\,.$$

Las variables se pueden separar, y se tiene

$$\frac{L}{gH}\;\frac{dU}{1 - \dfrac{U^2}{2g\,H}} = dt$$

de donde, integrando

$$\frac{L}{gH}\,\sqrt{2gH}\quad Arg\,th\,\frac{U}{\sqrt{2gH}} = t + C$$

Si se toman como condiciones iniciales: $t = 0$, $U = 0$, se obtiene finalmente

$$U = \sqrt{2gH}\quad th\,\sqrt{\frac{gH}{2}}\;\frac{t}{L} \tag{4-59}$$

La variación de U hasta el valor límite $\sqrt{2\,g\,H}$ se representa gráficamente

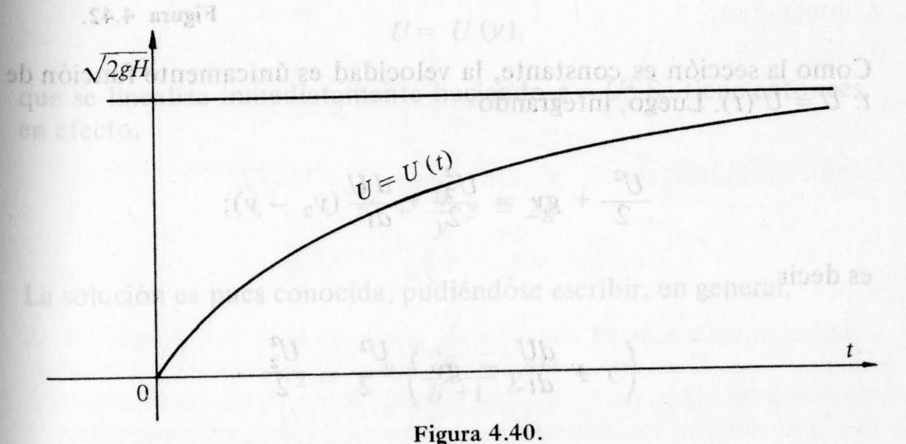


Figura 4.40.

4.93 Vaciado de un depósito rectangular

Un depósito se está vaciando. Encontrar la velocidad con que baja la superficie libre del líquido en función de la altura y

el tiempo de vaciado total, si la altura del líquido en el instante $t = 0$ es H.

Para resolver este problema considérese un instante cualquiera t en que el nivel del fluido se encuentra a la altura y. El teorema de Bernoulli aplicado a un flujo no permanente permite escribir

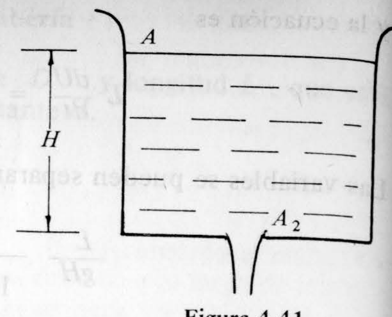


Figura 4.41.

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gy_2 + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds.$$

La presión en los puntos (1) y (2) de una línea de corriente, es la misma. Como $y_2 = 0$, se tiene

$$\frac{U^2}{2} + gy = \frac{U_2^2}{2} + \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds.$$

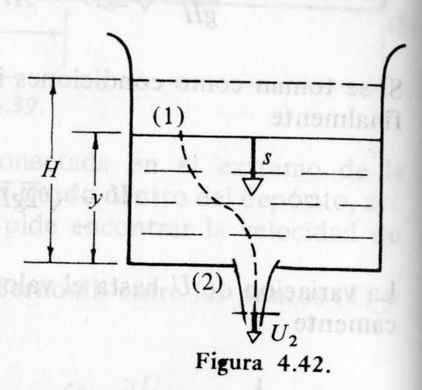


Figura 4.42.

Como la sección es constante, la velocidad es únicamente función de t: $U = U(t)$. Luego, integrando

$$\frac{U^2}{2} + gy = \frac{U_2^2}{2} + \frac{dU}{dt}(y_2 - y);$$

es decir

$$-y\frac{dU}{dt} = gy + \frac{U^2}{2} - \frac{U_2^2}{2}.$$

Por continuidad, se relaciona U_2 con U

$$C_d\, U_2\, A_2 = UA$$

donde C_d es el coeficiente de descarga.

La ecuación de Bernoulli se escribe, pues,

$$-y\frac{dU}{dt} + \frac{U^2}{2}\left[\left(\frac{A}{C_d A_2}\right)^2 - 1\right] = gy.$$

Esta ecuación tiene todavía dos funciones U, y, y la variable independiente t.

Si se observa que

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dt} = -U\frac{dU}{dy},$$

puesto que $U = -\frac{dy}{dt}$, se puede escribir la ecuación anterior

$$U\frac{dU}{dy} + \frac{B}{2y}U^2 = g$$

con

$$B = \left(\frac{A}{C_d A_2}\right)^2 - 1$$

Esto es una ecuación diferencial no lineal de primer orden, con

$$U = U(y),$$

que se linealiza inmediatamente haciendo $z = U^2$. Se tiene entonces, en efecto,

$$z' + \frac{B}{y}z = 2g$$

La solución es pues conocida, pudiéndose escribir, en general,

$$z = y^{-B}\left(\frac{2g}{B+1}y^{B+1} + C\right)$$

y, volviendo a la función U,

$$U^2 = \frac{2g}{B+1}y + Cy^{-B}$$

Dado que las condiciones iniciales de este problema son $y = 0$, $U = 0$,

se concluye que $C = 0$, de donde

$$U = \sqrt{\frac{2g}{B+1}\, y}$$

Recordando ahora la expresión de B, se tiene también

$$U = \frac{C_d A_2}{A} \sqrt{2g}\; y^{1/2}.$$

La velocidad de la superficie libre varía pues como la raíz cuadrada de la altura.

Dependencia del tiempo. Si se sustituye U por su valor en función de la altura, se tiene

$$-\frac{dy}{dt} = \frac{C_d A_2}{A} \sqrt{2g}\; y^{1/2},$$

de donde

$$-y^{-1/2}\, dy = \frac{C_d A_2}{A} \sqrt{2g}\; dt$$

e, integrando

$$C_2 - 2\, y^{1/2} = \frac{C_d A_2}{A} \sqrt{2g}\; t$$

Condición inicial: $t = 0$, $y = H$, luego $C_2 = 2\sqrt{H}$,

$$\sqrt{H} - \sqrt{y} = \frac{C_d A_2}{2A} \sqrt{2g}\; t$$

y despejando $y = y(t)$

$$y = \left(\sqrt{H} - \frac{C_d A_2}{2A} \sqrt{2g t}\right)^2.$$

Vice-versa, si se despeja t

$$t = 2A \frac{\sqrt{H} - \sqrt{y}}{C_d A_2 \sqrt{2g}}$$

El tiempo de vaciado total es pues

$$t_T = \frac{2A}{C_d A_2} \sqrt{\frac{H}{2g}}$$

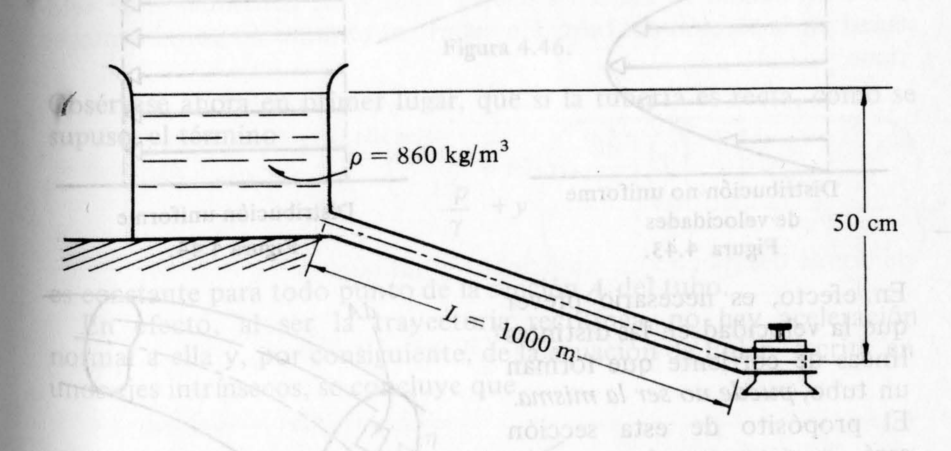
Ejercicios

1. Una llave de paso al final de un eleoducto se cierra de manera que la velocidad en la tubería varía de acuerdo con la expresión

$$U = 2\,(1 - 0{,}5\; t),\ \ \text{m/seg}$$

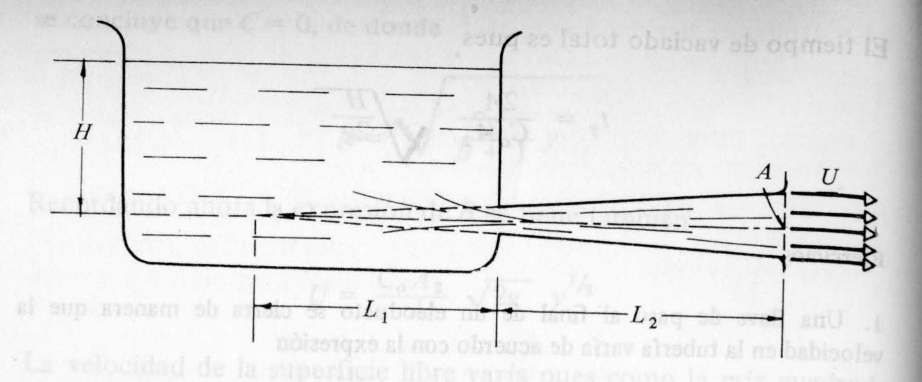
donde t es el tiempo en segundos contado desde el inicio del cierre.
¿Cuál será aproximadamente la presión al final de la operación en las inmediaciones de la llave? Despreciar las pérdidas por fricción.

Respuestas: 12.8 bar.



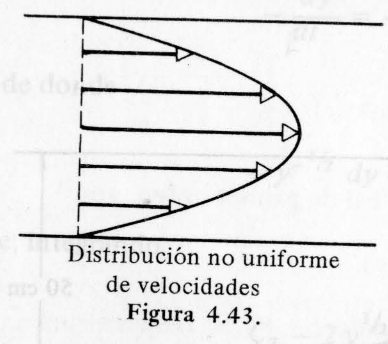
2. Un depósito de nivel constante suple líquido de viscosidad despreciable, mediante un tubo en forma de tronco de cono, como indica la figura. El tubo está originalmente tapado y lleno de líquido y se destapa bruscamente. Si la velocidad en régimen permanente es U_0, encontrar el tiempo necesario, después de quitar la tapa, para que la velocidad de salida alcance el valor $U = \eta\, U_0$ donde η es una fracción dada y $\eta < 1$. Expresar t en términos de L_1, L_2, H, g, η.

Respuesta: $t = \dfrac{2\, L_2\, (L_2 - L_1)}{L_1 \sqrt{2gH}}\ \arg th\; \eta$

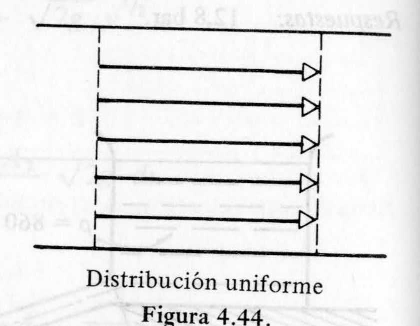


*4.10 Flujo no uniforme en una tubería

Ya anteriormente se mencionó el error que se puede cometer al aplicar el teorema de Bernoulli a una tubería si no se toma en cuenta la distribución de velocidades dentro de ella.



Distribución no uniforme de velocidades
Figura 4.43.



Distribución uniforme
Figura 4.44.

En efecto, es necesario prever que la velocidad en las distintas líneas de corriente que forman un tubo, *puede no ser la misma.* El propósito de esta sección será mostrar, en el caso particular de un fluído de *densidad constante*, cómo se puede aplicar el teorema de Bernoulli a una tubería *rectilínea.* La velocidad media es dada por

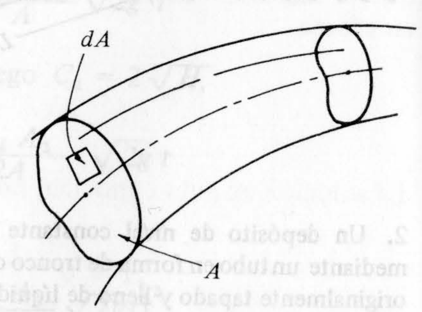


Figura 4.45.

$$U_m = \frac{1}{A}\int_{(A)} \bar{u} \cdot d\bar{A} = \frac{1}{A}\int_{(A)} U \, dA, \qquad (4\text{-}60)$$

entonces, escribiendo que para una línea de corriente, (4-29)

$$\frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t}\, ds + \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + y_2 = \frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + y_1 ,$$

se puede multiplicar por $U\,dA$, e integrar sobre la sección recta del tubo. Se tiene, entonces,

$$\frac{1}{g}\int_{(A)} U \int \frac{\partial U}{\partial t}\, ds\, dA + \int_{(A)} \frac{U^2}{2g}\, U\, dA + \int_{(A)} \left(\frac{p}{\gamma} + y\right) U\, dA = \text{const.} \qquad (4\text{-}61)$$

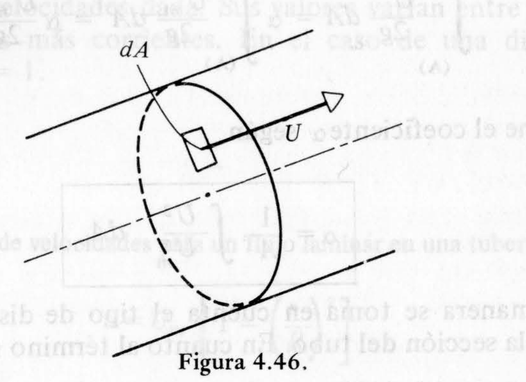


Figura 4.46.

Obsérvese ahora en primer lugar, que si la tubería es recta, como se supuso, el término

$$\frac{p}{\gamma} + y$$

es constante para todo punto de la sección A del tubo.

En efecto, al ser la trayectoria rectilínea, no hay aceleración normal a ella y, por consiguiente, de la ecuación de Euler, escrita en unos ejes intrínsecos, se concluye que

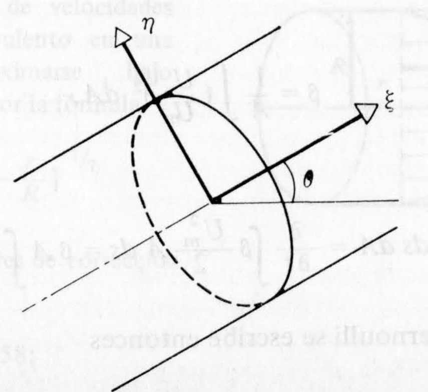


Figura 4.47.

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \eta} - \rho g \cos\theta$$

de donde

$$\frac{p}{\gamma} + \eta \cos\theta = \frac{p}{\gamma} + y = \text{const.}$$

El término de la energía cinética se puede escribir, (4-61),

$$\int_{(A)} \frac{U^3}{2g}\, dA = \alpha \int_{(A)} \frac{U_m^3}{2g}\, dA = \alpha \frac{U_m^3}{2g} A \qquad (4\text{-}62)$$

si se define el coeficiente α según

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{A}\int \frac{U^3}{U_m^3}\, dA,} \qquad (4\text{-}63)$$

De esta manera se toma en cuenta el tipo de distribución de velocidad en la sección del tubo. En cuanto al término no permanente, se tiene

$$\int_{(A)} U \int \frac{\partial U}{\partial t}\, ds\, dA = \frac{\partial U}{\partial t} \int \int_{(A)} \frac{U^2}{2} A\, ds,$$

de donde definiendo un coeficiente β tal que

$$\int \frac{U^2}{2}\, dA = \beta \int \frac{U_m^2}{2}\, dA = \beta\, \frac{U_m^2}{2} A, \qquad (4\text{-}64)$$

o sea

$$\beta = \frac{1}{A}\int \left(\frac{U}{U_m}\right)^2 dA, \qquad (4\text{-}65)$$

se tiene $\int_{(A)} U$

$$\int \frac{\partial U}{\partial t}\, ds\, dA = \frac{\partial}{\partial t} \int \beta \frac{U_m^2}{2} A\, ds = \beta A \int \frac{\partial U_m}{\partial t}\, ds \qquad (4\text{-}66)$$

El teorema de Bernoulli se escribe entonces

$$\frac{1}{g}\beta A U_m \int \frac{\partial U_m}{\partial t}\, ds + \alpha \frac{U_m^3}{2g} A + \left(\frac{p}{\gamma} + y\right) U_m A = \text{const.}$$

de donde

$$\boxed{\beta \int \frac{\partial U_m}{\partial t}\, ds + \alpha \frac{U_m^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + y = \text{const}} \qquad (4\text{-}67)$$

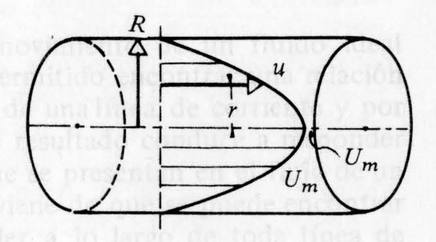
Los coeficientes α y β se pueden calcular una vez por todas para una distribución de velocidades dada. Sus valores varían entre 1 y 2 para las distribuciones más corrientes. En el caso de una distribución uniforme $\alpha = \beta = 1$.

Ejercicios

1. La distribución de velocidades para un flujo laminar en una tubería es

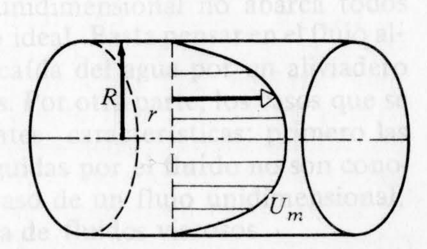
$$u = U_m \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

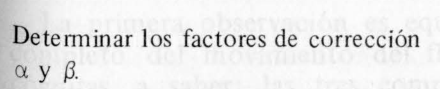
Determinar los factores de corrección α y β que intervienen en la ecuación de Bernoulli.



Respuesta: $\alpha = 2$.

2. La distribución de velocidades para un flujo turbulento en una tubería puede aproximarse, bajo ciertas condiciones, por la fórmula





$$u = U_m \left[1 - \frac{r}{R}\right]^{1/7}$$

Determinar los factores de corrección α y β.

Respuesta: $\alpha = 1.058$;

3. Para un flujo altamente turbulento ($R_e > 10^5$) la distribución de velocidades en una tubería es dada por

$$\frac{u}{u_{max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^{1/9}$$

donde y es la distancia a la pared y R el radio de la tubería. Determínese el factor de corrección α para este flujo.

Respuesta: $\alpha = 1.035$

CAPITULO 5*



Flujo irrotacional

5.1 Introducción

COMO SE ha visto, el estudio del movimiento de un fluido ideal limitado a una sola dimensión ha permitido encontrar una relación entre presión y velocidad a lo largo de una línea de corriente y por ende, de un tubo de corriente. Este resultado conduce a responder ciertas preguntas de tipo práctico que se presentan en el flujo de un fluido en tuberías, y en esencia proviene de que se puede encontrar una integral de la ecuación de Euler a lo largo de toda línea de corriente.

Pero no cabe duda por el flujo unidimensional no abarca todos los casos de movimiento de un fluido ideal. Basta pensar en el flujo alrededor de un ala de avión o en la caída del agua por un aliviadero para darse cuenta de sus limitaciones. Por otra parte, los casos que se acaban de plantear tienen las siguientes características: primero las trayectorias y líneas de corriente seguidas por el fluido no son conocidas *a priori*, como lo eran en el caso de un flujo unidimensional, segundo, como todo caso real, se trata de fluidos viscosos.

La primera observación es equivalente a decir que el problema completo del movimiento del fluido consta ahora de cuatro incógnitas, a saber: las tres componentes u_x, u_y, u_z, de la velocidad y la presión p, en el caso de un fluido incompresible.

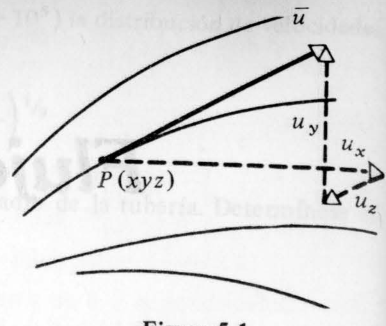


Figura 5.1.

En esta situación y suponiendo además, como se ha hecho hasta ahora , que el *fluido no es viscoso*, se tiene un número suficiente de ecuaciones para determinar, en principio, las cuatro incógnitas mencionadas: las tres ecuaciones de Euler (4–7) y la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{5-1}$$

El tema del capítulo presente es justamente ver cómo y cuando se puede integrar este sitema y hallar respuesta al problema planteado.

Queda mientras tanto por discutir el alcance y la importancia de las suposiciones hechas anteriormente.

Una hipótesis importante es que el *fluido es incompresible*. Su único propósito es el de hacer el problema más sencillo para empezar, pues equivale a suponer que la densidad ρ tiene un valor conocido de antemano y fijo. El estudio detallado de los fenómenos asociados con la compresibilidad se hará en capítulos subsiguientes. Cabe observar sin embargo que esta limitación no elimina el estudio del flujo alrededor de un ala de avión por ejemplo. En efecto, según se verá también, cuando las velocidades son relativamente bajas , esto es, bastante por debajo de la velocidad del sonido, los efectos de compresibilidad son despreciables en primera aproximación.

La otra suposición importante que se hace al usar las ecuaciones de Euler es la de un fluido no viscoso. Aunque esta hipótesis se levantará también más adelante, conviene discutir aquí qué aspectos físicos implica, con el objeto de mostrar cómo los resultados del capítulo presente pueden ser de gran utilidad, incluso para un fluido real.

Es necesario decir desde ahora, que el movimiento de un fluido viscoso sólo es conocido exactamente en un número muy limitado de casos. Ello proviene, sin ir más lejos, de que las ecuaciones que rigen tal caso no son lineales y son más complejas todavía que las de Euler. Por esta razón lo que se trata de hacer es de proceder por aproximaciones sucesivas: la primera de ellas consiste justamente en suponer el fluido sin viscosidad alguna, esto es, suponer un *fluido ideal;*

la segunda aproximación es la llamada *teoría de la capa límite*, que consiste en postular que la viscosidad se hace sentir, para velocidades relativamente altas sólo en la *vecindad* inmediata de las paredes que limitan el flujo del fluído. Esta hipótesis de trabajo ha sido confirmada experimentalmente de manera completa. La imagen que uno puede tener del movimiento de un fluído viscoso, es pues la de un fluído frenado fuertemente en sus contornos, en una zona más o menos estrecha, llamada capa límite y de un fluido practicamente *ideal* lejos de esas paredes.

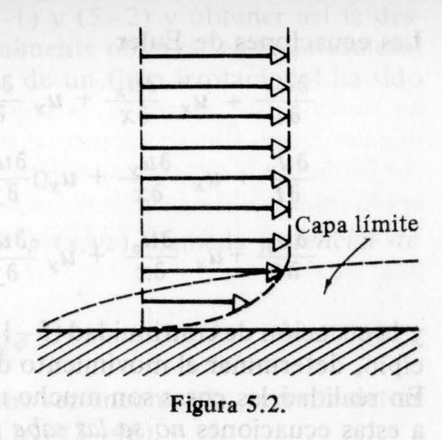


Figura 5.2.

Así pues, el estudio del flujo al rededor de una esfera deberá hacerse por así decir en dos etapas:

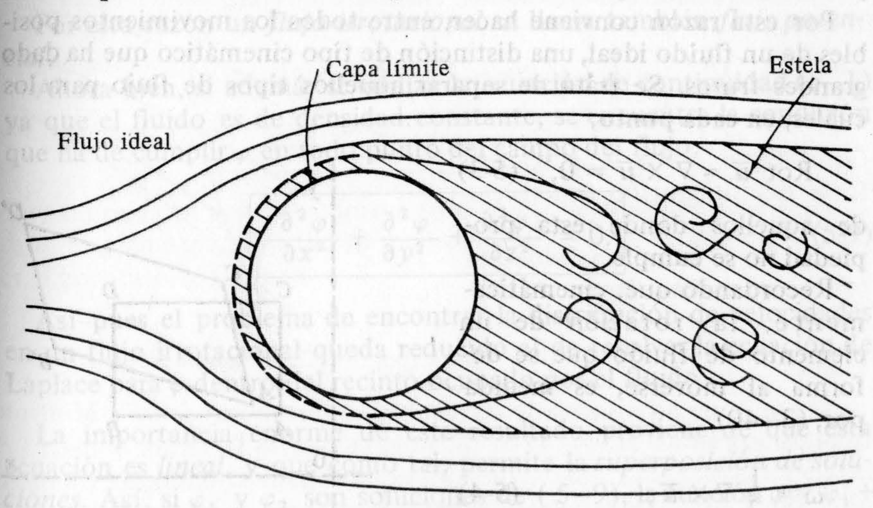


Figura 5.3.

primero se estudiará el flujo del fluído, *supuesto ideal* alrededor de la esfera, y después, se entrará a estudiar los efectos viscosos en la estrecha ha *capa límite* al rededor de la esfera, y *sus consecuencias*, a saber, la formación de una *estela turbulenta* aguas abajo, detrás del objeto.

Como se ve, los resultados obtenidos usando el *modelo de un fluido ideal* son ciertamente correctos en primera aproximación, pero han de ser corregidos grandemente para conducir a resultados comprobables experimentalmente.

5.2 Flujo rotacional y flujo potencial

Las ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + G_x$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + G_y \quad (5\text{-}2)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + G_z$$

y la ecuación de continuidad (5–1) ya mencionada, permiten, en principio, determinar el movimiento de un fluido ideal en cualquier caso. En realidad las cosas son mucho más complicadas ya que, en general, a estas ecuaciones *no se las sabe integrar*. La dificultad esencial proviene de los términos de la aceleración convectiva $u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}$, . . . etc., que no son lineales. Y no existen en matemáticas, métodos generales para resolver este tipo de ecuaciones no lineales.

Por esta razón conviene hacer, entre todos los movimientos posibles de un fluido ideal, una distinción de tipo cinemático que ha dado grandes frutos. Se trata de separar aquellos tipos de flujo para los cuales, en cada punto,

$$\text{Rot } \overline{u} = \nabla \times \overline{u} = 0, \quad (5\text{-}3)$$

de aquellos donde esta propiedad no se cumple.

Recordando que, cinemáticamente, la rotación de un elemento de fluido que se deforma al moverse, es medida por, (3–40),

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \overline{u}, \quad (5\text{-}4)$$

Figura 5.4.

se ve que si

$$\nabla \times \overline{u} = 0, \quad (5\text{-}5)$$

el flujo se puede llamar *irrotacional* con toda propiedad. Si en cambio, el fluido se mueve de manera tal que, en un conjunto de puntos

$$\nabla \times \overline{u} \neq 0, \quad (5\text{-}6)$$

se dice que el fluido es rotacional. En este capítulo se estudiará solamente el caso particular, pero muy importante de un *flujo irrotacional*. Se verá cómo entonces, se logra integrar, por lo menos en parte, el sistema de ecuaciones (5–1) y (5–2) y obtener así la descripción de flujos que se pueden realmente observar en la naturaleza.

Una de la primeras consecuencias de un flujo irrotacional ha sido ya considerada en el capítulo 3. Si

$$\nabla \times \overline{u} = 0,$$

se puede definir una función $\varphi = \varphi\ (x,y z)$, llamada *potencial de velocidades*, tal que, (3–49)

$$\overline{u} = \nabla \varphi, \quad (5\text{-}7)$$

de forma que una sola función φ, una vez encontrada, permite determinar las tres componentes u_x, u_y, u_z, (3–48).

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (5\text{-}8)$$

Por esta razón un *flujo irrotacional* se llama también *flujo potencial*.

Ahora bien, si además se utiliza la ecuación de continuidad (5–1) ya que el fluido es de densidad constante, se encuentra la condición que ha de cumplir φ en todo punto del campo del flujo:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.} \quad (5\text{-}9)$$

Así pues el problema de encontrar la distribución de velocidades en un flujo irrotacional queda reducido al de resolver la ecuación de Laplace para φ dentro del recinto ocupado por el fluido.

La importancia enorme de este resultado proviene de que esta ecuación es *lineal*, y que como tal, permite la *superposición de soluciones*. Así, si φ_1 y φ_2 son soluciones de (5–9), la función $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, también lo será. Esta propiedad casi nunca se produce en mecánica de los fluidos, de ahí el gran desarrollo alcanzado por la teoría de flujo potencial.

Por otra parte la solución de (5–2) y (5–9) en casos concretos puede presentar todavía grandes dificultades. Por ello se han desarrollado varios métodos, aplicables según las circunstancias. Se pueden mencionar los métodos analíticos, gráficos, por analogía, numéricos, etc. En el presente capítulo se dará una introdución breve a los métodos analíticos pues son los que mayor luz arrojan sobre la naturaleza del flujo potencial, siempre y cuando sean aplicables.

5.3 Teorema de Bernoulli

Suponiendo que el campo de velocidades de un flujo potencial sea conocido, por el procedimiento indicado en la sección anterior, queda todavía por averiguar la presión en el seno del fluido en movimiento. Para ello se recurre a la ecuación de Euler e integrándola debidamente, a un nuevo teorema de Bernoulli, de contenido distinto al obtenido en el capítulo 4

En efecto, ahora el flujo es irrotacional. La aceleración se puede pues escribir

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\cdot\nabla\bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla\frac{U^2}{2} - \bar{u}\times\nabla\times\bar{u}$$

$$= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla\frac{U^2}{2}\,.$$

recordando (5–5).

Si además se suponen las fuerzas de campo conservativas, $G = -\nabla\Omega$, la ecuación de Euler toma la forma

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla\frac{U^2}{2} = \frac{1}{\rho}\nabla p\ \nabla\Omega$$

Considérese ahora una trayectoria de integración *cualquiera* entre dos puntos A y B del campo de flujo, no necesariamente sobre la misma línea de corriente.

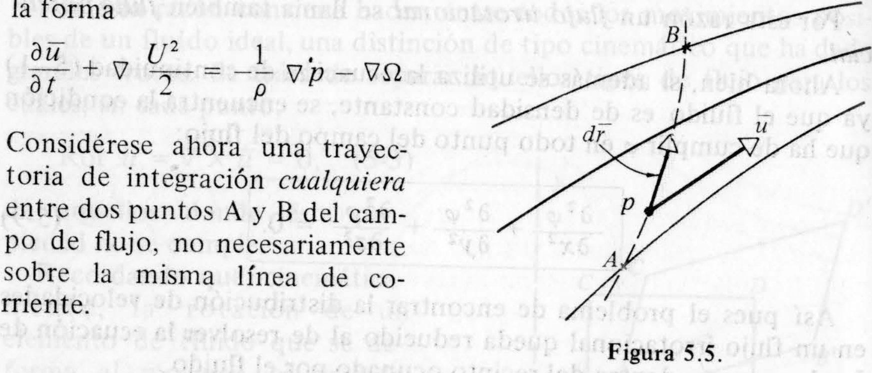


Figura 5.5.

Sea $d\bar{r}$ una diferencial de arco sobre la misma trayectoria. Multipliquemos por $d\bar{r}$

$$\frac{d\bar{u}}{dt}\cdot d\bar{r} + \nabla\frac{U^2}{2}\cdot d\bar{r} = \frac{1}{\rho}\nabla p\cdot d\bar{r} - \nabla\Omega\cdot d\bar{r} \qquad (5\text{–}12)$$

Observando que para cualquier función escalar se tiene

$$\nabla\Omega\cdot d\bar{r} = d\Omega \qquad (5\text{–}13)$$

(5-12) se escribe

$$d\left(\int\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot d\bar{r}\right) + d\,\frac{U^2}{2} + \frac{dp}{\rho} + d\Omega = 0$$

$$d\left[\int\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot d\bar{r} + \frac{U^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} + \Omega\right] = 0. \qquad (5\text{-}14)$$

La variación de la expresión entre corchetes, a lo largo de *cualquier trayectoria* entre los dos puntos A y B es nula. Su valor, en un instante dado es pues constante. Cabe sin embargo la posibilidad de que esta "constante" sea función del tiempo. Se tiene entonces el teorema de Bernoulli,

$$\int\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot d\bar{r} + \frac{U^2}{2} + \int\frac{dp}{\rho} + \Omega = B(t). \qquad (5\text{-}15)$$

Si el fluido es incompresible.

$$\int\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot d\bar{r} + \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Omega = B(t)$$

Potencial de velocidades. El teorema de Bernoulli se puede escribir en términos del potencial φ

En efecto,

$$\int\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\cdot d\bar{r} = \int\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi\cdot d\bar{r} = \frac{\partial}{\partial t}\int\nabla\varphi\cdot d\bar{r} = \frac{\partial}{\partial t}\int d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Luego,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \int\frac{dp}{\rho} + \Omega = B(t). \qquad (5\text{-}16)$$

Este teorema se aplica en forma similar al caso unidimensional. Si el flujo es permanente, el fluído incompresible y si el campo de fuerzas es el gravitatorio se tiene

$$\frac{U_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gy_1 = \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gy_2 \qquad (5\text{-}17)$$

Volviendo ahora al problema general, se ve que al haber encontrado cómo determinar la distribución de velocidades y las presiones en un flujo irrotacional el problema planteado inicialmente está, en principio, resuelto. Para alcanzar efectivamente algunas soluciones de tipo analítico se introducirán algunos conceptos adicionales. Después se procederá a la presentación de varias soluciones elementales, por el método analítico.

5.4 Noción de circulación

Un concepto útil en el estudio del movimiento de un fluido es el de circulación. Si se considera el campo de velocidades y se

toma una *curva* cerrada cualquiera C en su seno, se llama circulación a la cantidad,

$$\Gamma = \oint_c \bar{u} \cdot d\bar{r} \qquad (5-18)$$

Como se observará ésta es una cantidad escalar de estructura similar a la de trabajo de una fuerza sobre un recorrido cerrado.

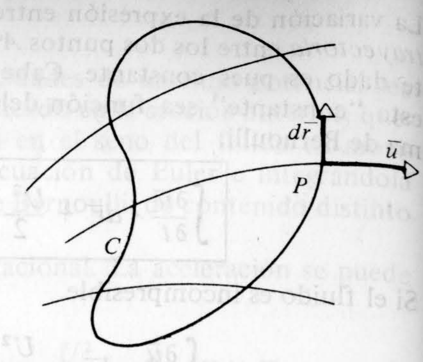


Figura 5.6.

La propiedad fundamental de esta cantidad es proporcionada por el teorema de Stokes del análisis vectorial.

Supóngase que una región simplemente conexa del campo del flujo, se toma una superficie de control no cerrada A y que se llama C la curva que le sirve de borde.

Entonces se tiene, como es sabido,

$$\Gamma = \oint_c \bar{u} \cdot d\bar{r} = \int_{(A)} \nabla \times \bar{u} \cdot d\bar{A}, \qquad (5-19)$$

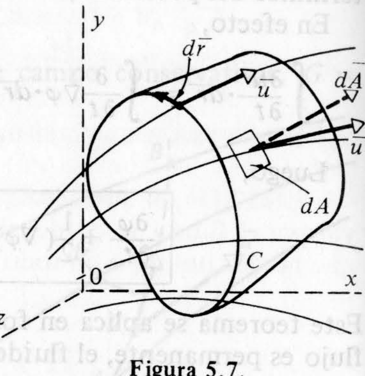


Figura 5.7.

y en el caso de un flujo potencial, recordando (5-5).

$$\Gamma = \oint_c \bar{u} \cdot d\bar{r} = 0. \qquad (5-20)$$

Así pues, la circulación calculada en una región simplemente conexa de un flujo potencial es siempre nula. Tendremos oportunidad más adelante de comprobar esta propiedad.

5.5 Flujo potencial plano

El caso más sencillo de flujo potencial es el bidimensional, esto es, cuando el movimiento de un fluido se produce paralelamente a un plano, de manera que la tercera dimensión no entra en juego en ninguna de las ecuaciones. Entonces vienen a concurrir dos conceptos fundamentales ya conocidos: Por una parte, al ser plano el movimiento se puede definir una función de corriente (3-21) que describe

las líneas de corriente, y por otra, al ser el flujo potencial, la velocidad está determinada por el potencial $\varphi = \varphi(x, y)$.

El flujo puede entonces ser descrito por dos familias de curvas a saber: las líneas de corriente y las líneas equipotenciales. Estas curvas se cortan ortogonalmente en todo punto, ya que la velocidad es tangente a unas (3-3), y perpendicular a las otras, (3-51).

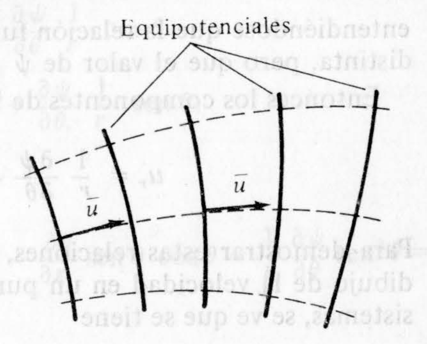


Figura 5.8.

En cuanto a las componentes de la velocidad, son dadas en coordenadas cartesianas, (3-48) y (3-46), por

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (5-21)$$

Estas relaciones están a la base del estudio del presente tema mediante la teoría de variable compleja. Para el movimiento plano considerado, han de permitir determinar φ conocida ψ y vice-versa.

Ya se ha visto que φ satisface la ecuación de Laplace. Así mismo, si se escribe que $\nabla \times \bar{u} = 0$, esto es

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0,$$

en el caso plano, y se sutituyen u_x, u_y en términos de ψ se tiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \qquad (5-22)$$

Ambas funciones φ y ψ son pues armónicas. Debido a (5-21) se las llama armónicas conjugadas.

A causa del uso frecuente que haremos de las *coordenadas polares* conviene encontrar también las ecuaciones básicas del flujo potencial en dicho sistema de referencia. Algunos de los resultados se dejarán como ejercicio.

Así por ejemplo si $\psi = \psi(r, \theta)$ es la función de corriente en coordenadas polares, se ha de tener, en todo punto del flujo

$$\psi(r, \theta) = \psi_1(x, y)$$

esto es, el valor de ψ es el mismo en un punto dado, ya se mida su

posición en coordenadas cartesianas o en polares. Por costumbre se elimina el subíndice de ψ_1, y se escribe

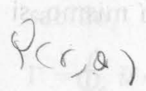
$$\psi = \psi\,(r,\,\theta) = \psi\,(x,y), \tag{5-23}$$

entendiéndose que la relación funcional en polares y en cartesianas es distinta, pero que el valor de ψ es el mismo.

Entonces los componentes de la velocidad son dadas por

$$u_r = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{5-24}$$

Para demostrar estas relaciones, se razona como sigue. Haciendo un dibujo de la velocidad en un punto, y de sus componentes en ambos sistemas, se ve que se tiene



$$\left.\begin{aligned} u_r &= u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta, \\ u_\theta &= u_y \cos\theta - u_x \operatorname{sen}\theta, \end{aligned}\right\} \tag{5-25}$$

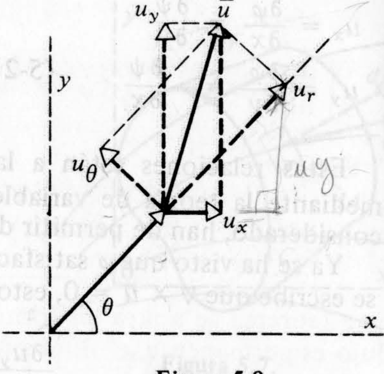


Figura 5.9.

Ahora bien

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial y}, \\ u_y &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\frac{\partial\theta}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{5-26}$$

y recordando las fórmulas de cambio de coordenadas de cartesianas a polares

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right., \quad \text{o bien} \quad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \tag{5-27}$$

se tiene

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

Llevando estos valores en u_x y u_y,

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\frac{1}{r}\cos\theta,$$

$$u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta,$$

y por consiguiente

$$u_r = \frac{\partial\psi}{\partial r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cos^2\theta - \frac{\partial\psi}{\partial r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\operatorname{sen}^2\theta = $$

$$= \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos^2\theta + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \frac{\partial\psi}{\partial r}\operatorname{sen}^2\theta - \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$= -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

De la misma manera, el lector comprobará que

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}. \tag{5-28}$$

Finalmente, tanto $\varphi\,(r,\,\theta)$ como $\psi\,(r,\,\theta)$ satisfacen la ecuación de Laplace en coordenadas polares.

5.6 Flujos simples

Se llama así a los flujos generados por ciertos entes más o menos abstractos tales como fuentes, sumideros, vórtices puntuales, etc. que se definen con el objeto de encontrar la expresión matemática de distribuciones de velocidades sencillas. Estos flujos, *superpuestos,* conducen a otros flujos, mucho más interesantes para la ciencia y la técnica.

5.6.1 Flujo uniforme

Se llama así, como es sabido, a un flujo permanente que tiene la misma velocidad en todos los puntos. Tomando los ejes como se

indica, se tiene pues

$$\left.\begin{aligned} u_x &= U \\ u_y &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (5\text{-}29)$$

El potencial de velocidades será pues tal que

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U,$$

o sea

$$\boxed{\varphi = Ux\,,} \qquad (5\text{-}30)$$

Figura 5.10.

si se conviene que para $x = 0,\ \varphi = 0.$

Las líneas equipotenciales son rectas paralelas al eje 0_y. Asimismo de la función de corriente se deduce que

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U$$

o sea

$$\psi = U\,y, \qquad (5\text{-}31)$$

si se conviene también en que $\psi = 0$ para $y = 0$.

Por supuesto tanto φ como ψ satisfacen la ecuación de Laplace.

Este primer ejemplo es probablemente la mejor oportunidad para hablar sobre las *condiciones de contorno* en un fluido ideal. Supóngase que el eje $0x$ se coloca un contorno, o sea, en este caso, una pared horizontal que soporta el fluido. Ello es posible porque la velocidad del fluido *no tiene componente normal a la pared*. Esto es evidentemente una condición que siempre habrá de producirse. En cambio *si* hay movimiento tangencialmente a la pared. En efecto, como el fluido no tiene viscosidad, sus distintas capas se mueven libremente sin interferir unas con otras, y "no les importa" por así decir, si al lado hay otra capa líquida o una pared inmóvil. Esto aclara porqué un fluido *ideal* puede tener una velocidad cualquiera en contacto con una pared. Un estudio más riguroso se hará al hablar de fluidos viscosos.

Para terminar con el ejemplo actual, se determinan ahora las características del flujo uniforme en coordenadas polares.

El potencial de velocidades y la función de corriente son evidentemente

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= U_r \cos\theta\,, \\ \psi &= U_r \operatorname{sen}\theta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}32)$$

Luego las componentes de la velocidad

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U\cos\theta\,, \\ u_\theta &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\,U \operatorname{sen}\theta\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}33)$$

5.6.2 Fuentes y sumideros

Se llama flujo de una fuente o manantial a un flujo plano en el cual el fluido se mueve como si todo él surgiese de una sola línea, perpendicular al plano, y que se reparte por igual en todas las direcciones.

El concepto de fuente es naturalmente la idealización de un flujo que pudiera realizarse aproximadamente con un tubo que fuera perdiendo líquido por toda su superficie lateral. Su interés principal es que da lugar a un flujo simétrico sencillo y que conduce a soluciones de la ecuación de Laplace que podrán ser utilizadas como elementos de superposición para obtener flujos más complejos y más "reales".

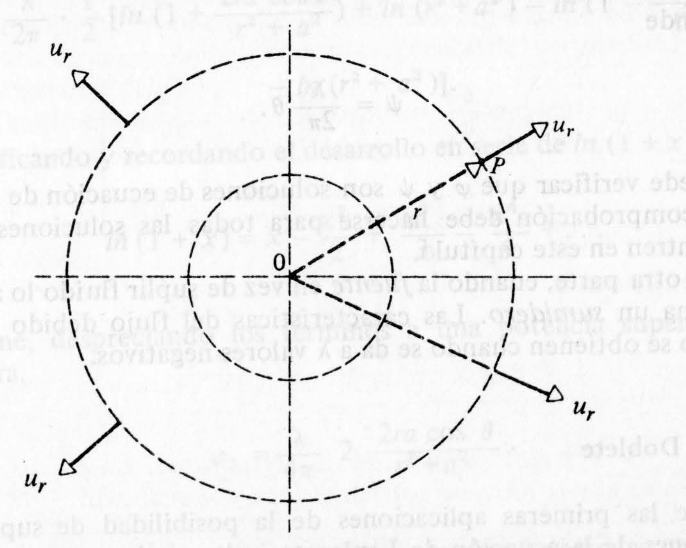


Figura 5.11.

Si se supone la fuente colocada en un origen de coordenadas y si ésta tiene un caudal por unidad de ancho de λ, la velocidad a una distancia r del centro será dada por

$$u_r = \frac{\lambda}{2\pi r}, \tag{5-34}$$

$$u_\theta = 0. \tag{5-35}$$

Estas relaciones permiten calcular las otras características del flujo. El potencial de velocidades es tal que

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

luego

$$\boxed{\varphi = \frac{\lambda}{2\pi} \ln r,} \tag{5-36}$$

y la función de corriente

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

de donde

$$\psi = \frac{\lambda}{2\pi}\,\theta. \tag{5-37}$$

Se puede verificar que φ y ψ son soluciones de ecuación de Laplace. Esta comprobación debe hacerse para todas las soluciones que se encuentren en este capítulo.

Por otra parte, cuando la *fuente* en vez de suplir fluido lo absorbe, se llama un *sumidero*. Las características del flujo debido a un sumidero se obtienen cuando se da a λ valores negativos.

5.6.3 Doblete

Una de las primeras aplicaciones de la posibilidad de superponer soluciones de la ecuación de Laplace, resulta ser la superposición de los flujos de una fuente y de un sumidero., adecuadamente definidos.

Sean en efecto, una fuente y un sumidero, ubicados como se indica, a una misma distancia a de un origen 0 de coordenadas. Sea P un punto cualquiera del campo del flujo. El valor del potencial φ en ese punto, que corresponde al flujo resultante de la presencia simultánea de la fuente y del sumidero, se obtiene por superposición:

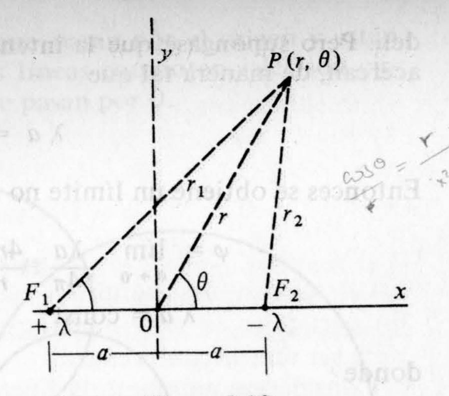


Figura 5.12.

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi}\,[\ln r_1 - \ln r_2]$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\,[\ln (r^2 + a^2 + 2\,ra\cos\theta)^{1/2} - \ln (r^2 + a^2 - 2\,ra\cos\theta)^{1/2}].$$

Ahora bien el flujo que se quiere buscar va a ser un caso límite. A saber, el flujo que se obtendría si la fuente y el sumidero se acercasen al mismo punto 0, de la misma manera, y en forma tal que el flujo resultante tuviese sentido físico.

Para ello se concibe que a es una cantidad pequeña frente a r, y se escribe

$$\varphi_3 = \frac{\lambda}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\,[\ln\left(1 + \frac{2ra\cos\theta}{r^2 + a^2}\right) + \ln (r^2 + a^2) - \ln\left(1 - \frac{2ra\cos\theta}{r^2 + a^2}\right)$$

$$- \ln (r^2 + a^2)].$$

Simplificando y recordando el desarrollo en serie de $\ln (1 + x)$

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

se tiene, despreciando los términos a una potencia superior a la primera,

$$\varphi_3 = \frac{\lambda}{4\pi}\cdot 2\,\frac{2ra\cos\theta}{r^2 + a^2}.$$

Ahora bien, si en esta expresión se hace tender a a cero, se obtiene $\varphi_3 = 0$, como sería de esperar puesto que fuente y sumidero se confun-

den. Pero supóngase que la intensidad λ de ambos crece mientras se acercan, de manera tal que

$$\lambda\, a = \text{const.}$$

Entonces se obtiene un límite no nulo, esto es

$$\varphi = \lim_{\substack{a \to 0 \\ \lambda a = \text{const}}} \frac{\lambda a}{4\pi} \, \frac{4r \cos\theta}{r^2 + a^2} = \chi \, \frac{\cos\theta}{r}$$

donde

$$\chi = \frac{\lambda a}{\pi}$$

La función φ así obtenida es una solución de la ecuación de Laplace, como se puede comprobar fácilmente. Por consiguiente representa el potencial de velocidades de un nuevo ente llamado *doblete*, en recuerdo de su origen como situación límite de una fuente y de un sumidero. La cantidad χ es llamada la *intensidad* del doblete.

Conocido el potencial de velocidades de un doblete

$$\varphi = \chi \, \frac{\cos\theta}{r} = \chi \, \frac{x}{x^2 + y^2} \tag{5-38}$$

se puede determinar las componentes de la velocidad y la función de corriente:

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\chi \, \frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{r} \, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\chi \, \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned}\right\} \tag{5-39}$$

y por consiguiente

$$\psi = -\chi \, \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} = -\chi \, \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{5-40}$$

Las líneas de corriente son fáciles de determinar. En efecto si ψ = const. , se ve que la línea de corriente tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 + \frac{\chi}{\psi} \, y = 0. \tag{5-41}$$

esto es, se trata de circunferencias que pasan por el origen y están centradas en el eje $0y$. Asimismo, las líneas equipotenciales son circunferencias centradas sobre $0x$, y que pasan por 0.

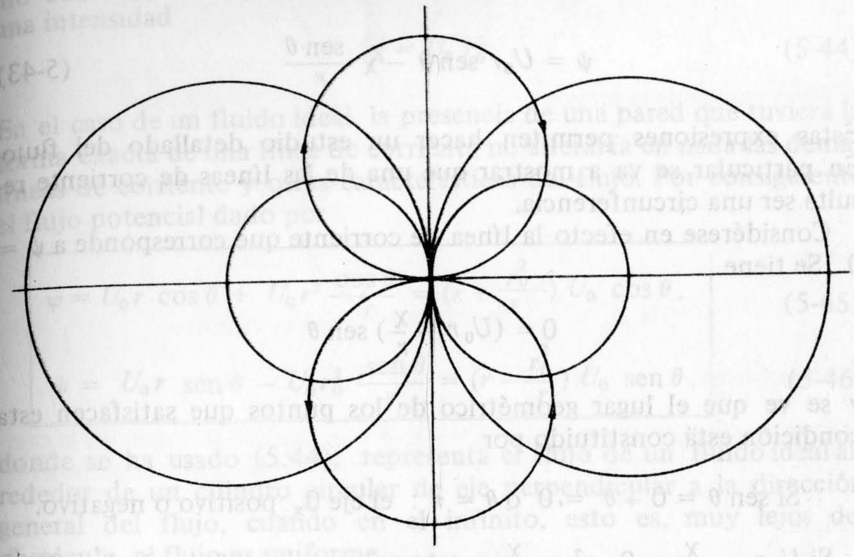


Figura 5.13.

5.7 Flujo alrededor de un cilindro

La aplicación más importantes de los conceptos anteriores conduce al flujo potencial plano de un fluido ideal incomprensible alrededor de un cilindro circular, colocado con su generatriz perpendicular a la dirección general del flujo.

En efecto, basta para ello *superponer* el flujo debido a una corriente uniforme U_0 y el de un doblete.

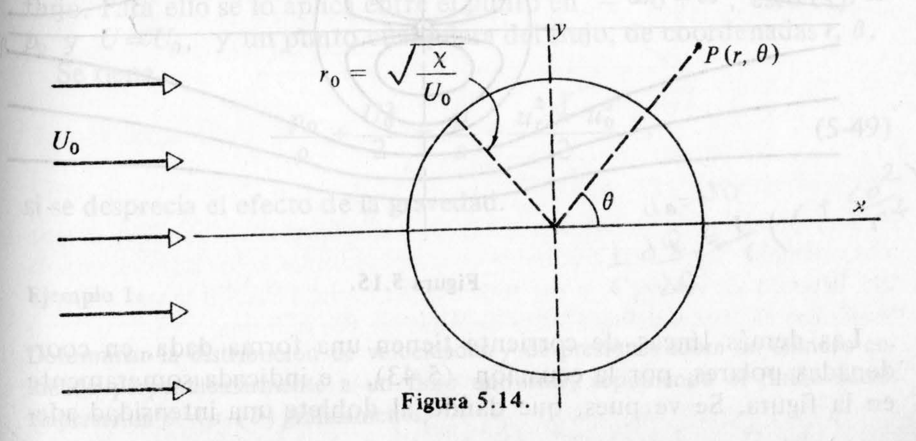


Figura 5.14.

El potencial de velocidades y la función de corriente son entonces

$$\varphi = U_0 r \cos\theta + \chi \frac{\cos\theta}{r}, \tag{5-42}$$

$$\psi = U_0 r \operatorname{sen}\theta - \chi \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \tag{5-43}$$

Estas expresiones permiten hacer un estudio detallado del flujo. En particular se va a mostrar que una de las líneas de corriente resulta ser una circunferencia.

Considérese en efecto la línea de corriente que corresponde a $\psi = 0$. Se tiene

$$0 = (U_0 r - \frac{\chi}{r}) \operatorname{sen}\theta$$

y se ve que el lugar geométrico de los puntos que satisfacen esta condición está constituido por

Si $\operatorname{sen}\theta = 0 \to \theta = 0$ ó $\theta = \pi$: el eje 0_x positivo o negativo.

Si $U_0 r - \frac{\chi}{r} = 0$, $r^2 = \frac{\chi}{U_0}$, esto es, una circunferencia de radio $r_0 = \sqrt{\frac{\chi}{U_0}}$ centrada en el origen.

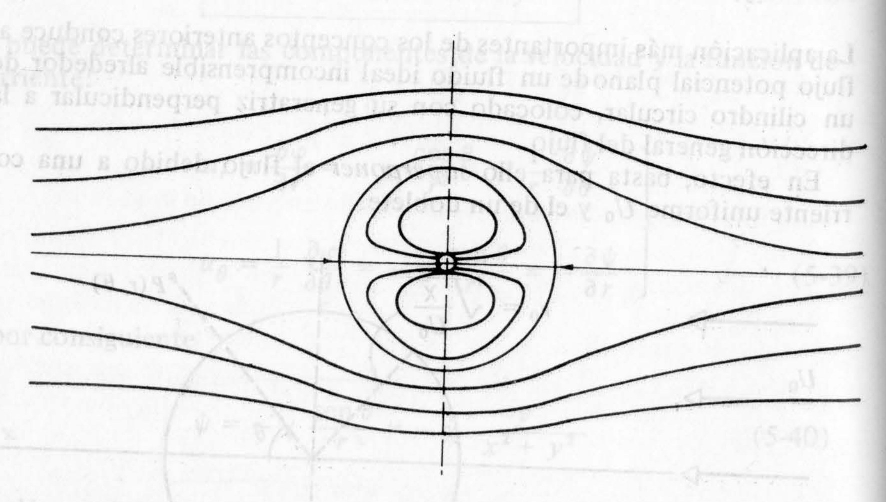


Figura 5.15.

Las demás líneas de corriente tienen una forma dada, en coordenadas polares, por la ecuación (5.43), e indicada someramente en la figura. Se ve pues, que dando al doblete una intensidad adecuada, queda determinado un flujo potencial con una línea de corriente circular, del radio deseado. Inversamente, si se pregunta por un flujo potencial que tenga una línea de corriente circular de un radio dado r_0, se lo puede obtener inmediatamente al dar el doblete una intensidad

$$\chi = U_0 r_0^2 \tag{5-44}$$

En el caso de un fluido ideal, la presencia de una pared que tuviera la forma exacta de una línea de corriente no alteraría en nada las demás líneas de corriente y otras características del flujo. Por consiguiente el flujo potencial dado por

$$\varphi = U_0 r \cos\theta + U_0 r^2 \frac{\cos\theta}{r} = (r + \frac{r_0^2}{r}) U_0 \cos\theta, \tag{5-45}$$

$$\psi = U_0 r \operatorname{sen}\theta - U_0 r_0^2 \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} = (r - \frac{r_0^2}{r}) U_0 \operatorname{sen}\theta, \tag{5-46}$$

donde se ha usado (5.44), representa el flujo de un fluido ideal alrededor de un cilindro circular de eje perpendicular a la dirección general del flujo, cuando en el infinito, esto es, muy lejos del obstáculo, el flujo es uniforme.

La distribución de velocidades se obtiene inmediatamente

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = (1 - \frac{r_0^2}{r^2}) U_0 \cos\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{5-47}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -(1 + \frac{r_0^2}{r^2}) U_0 \operatorname{sen}\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{5-48}$$

Conocida la velocidad en cada punto, el teorema de Bernoulli permite encontrar la distribución de presiones en todo el campo del flujo. Para ello se lo aplica entre el punto en $-\infty$ ó $+\infty$, esto es $p = p_0$ y $U = U_0$, y un punto cualquiera del flujo, de coordenadas r, θ.

Se tiene

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{U_0^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{u_r^2 + u_\theta^2}{2}, \tag{5-49}$$

si se desprecia el efecto de la gravedad.

Ejemplo 1:

Determinar la distribución de velocidades y de presiones sobre un cilindro colocado perpendicularmente a un flujo uniforme, suponiendo el fluido ideal. Representar $p = p(\theta)$ gráficamente.

En este caso las fórmulas anteriores de aplican. Las componentes de la velocidad sobre la superficie del cilindro de radio $r = r_0$ son:

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = -2U_0 \operatorname{sen}\theta,$$

y por consiguiente la presión

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2\left(1 - \frac{U^2}{U_0^2}\right)$$

donde

$$U = U_0 = -2U_0 \operatorname{sen}\theta \quad \text{sobre el cilindro.}$$

Por consiguiente

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2(1 - 4\operatorname{sen}^2\theta) \tag{5-50}$$

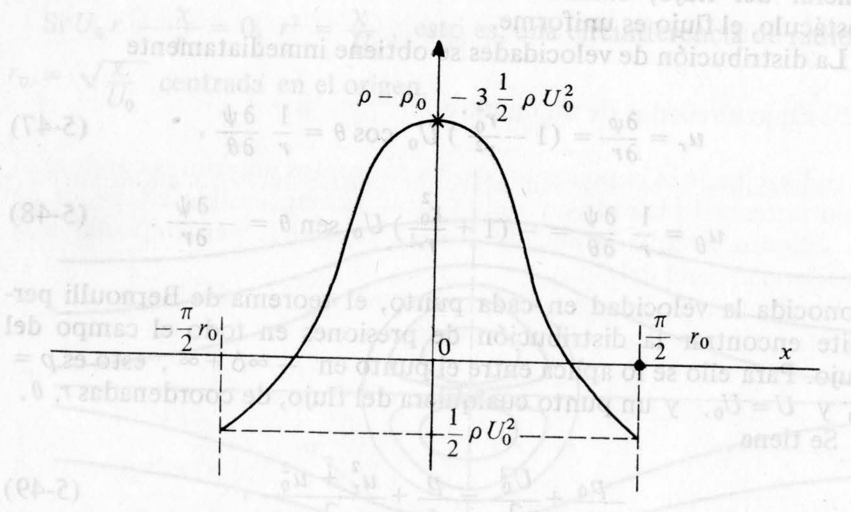


Figura 5.16.

La representación gráfica de $p = p(\theta)$ se puede hacer sobre unos ejes cartesianos o también según es la costumbre en estos problemas, sobre la propia superficie, llevando los valores de $p - p_0$ perpendicularmente a ella. En el caso presente se obtiene una figura llamada bulbo de presiones, por su forma.

Los puntos A y B son puntos importantes del cilindro. El primero se llama *punto de estancamiento*, pues es donde el fluido "choca" con el objeto, en este

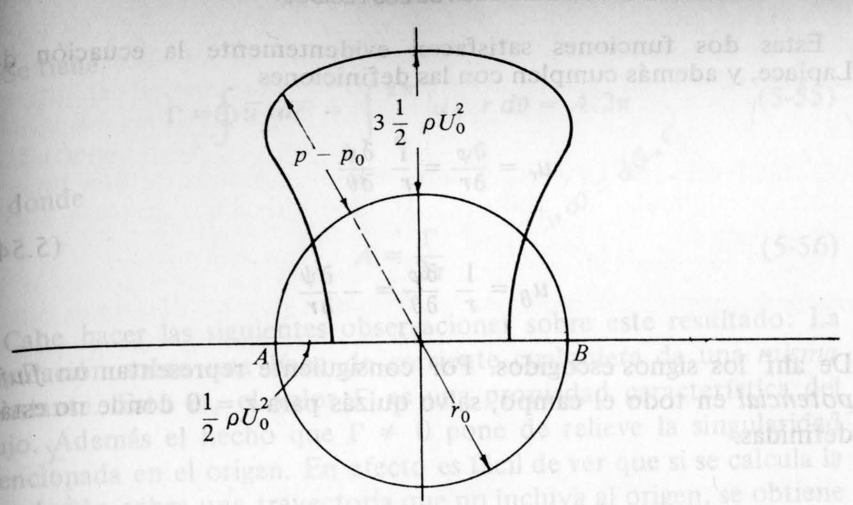


Figura 5.17.

caso el cilindro, y se detiene: $u_r = 0$, $u_\theta = 0$. La sobrepresión en este punto tiene el valor máximo positivo.

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho U_0^2 \tag{5-51}$$

y se llama *presión de estancamiento.* Es una cantidad característica del flujo y es utilizada a menudo como magnitud de referencia.

El punto B, aunque teóricamente en iguales condiciones que el A, no tiene la misma importancia, pues estando aguas abajo del objeto, las condiciones del flujo han resultado ya muy modificadas en un caso real, por la presencia de la viscosidad.

Se observarán los ejes de simetría y se comprende que la resultante de las fuerzas de presión sobre el cilindro ha de ser cero. Esta simetría no existe en realidad debido a los efectos viscosos como se verá más adelante. Fue d'Alambert el que primero señaló la contradicción que suponía el concluir que la fuerza neta sobre el cilindro era nula. Esta paradoja, que lleva su nombre, queda levantada cuando se toma en cuenta la viscosidad.

5.8 Vórtice libre

Otro flujo simple que habrá de ser utilizado en próximas superposiciones se obtiene a partir de la φ y la ψ de una fuente, cuando se definen unas nuevas funciones

$$\varphi = A\theta, \tag{5.52}$$

$$\psi = -A\ln r, \tag{5.53}$$

donde A es una constante.

Estas dos funciones satisfacen evidentemente la ecuación de Laplace, y además cumplen con las definiciones

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad (5.54)$$

De ahí los signos escogidos. Por consiguiente representan un *flujo potencial* en todo el campo, salvo quizás para $r = 0$ donde no estár definidas.

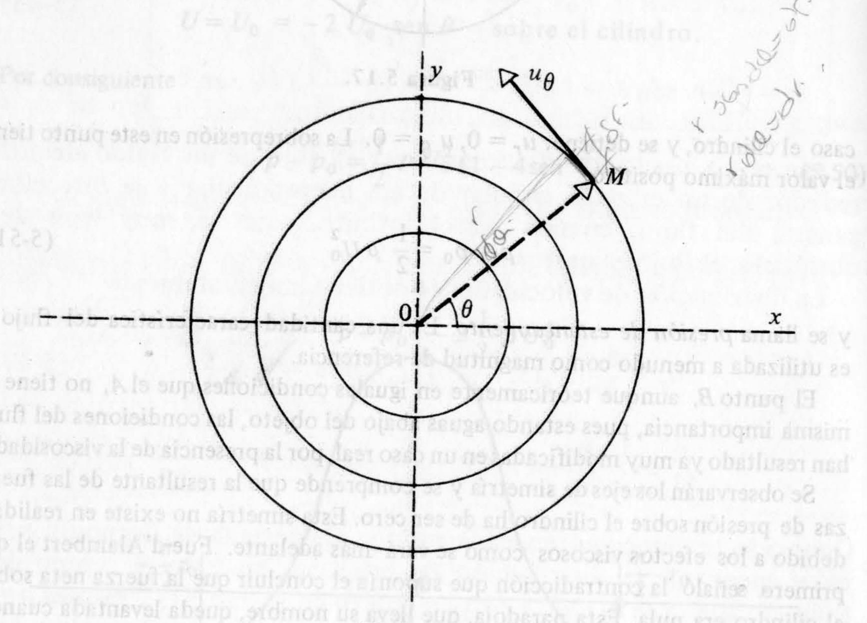


Figura 5.18.

El campo de velocidades es

$$u_r = 0$$

$$u_\theta = A\frac{1}{r}$$

esto es, el flujo no tiene componente radial y las líneas de corriente son circunferencias concéntricas, con la velocidad u_θ, inversamente proporcional a la distancia al centro.

La propiedad característica de este flujo se obtiene al calcular la circulación a lo largo de una línea de corriente cualquiera.

Se tiene

$$\Gamma = \oint \vec{u}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} u_\theta \; r\, d\theta = A\; 2\pi \qquad (5\text{-}55)$$

de donde

$$A = \frac{\Gamma}{2\pi} \qquad (5\text{-}56)$$

Cabe hacer las siguientes observaciones sobre este resultado: La circulación sobre una línea de corriente cualquiera da una *misma* constante. Esto es, el valor Γ es una propiedad característica del flujo. Además el hecho que $\Gamma \neq 0$ pone de relieve la singularidad mencionada en el origen. En efecto es fácil de ver que si se calcula la circulación sobre una trayectoria que no incluya al origen, se obtiene cero. Se dice entonces que hay *un punto* (o mejor una línea) de vorticidad en el origen y el flujo obtenido corresponde al llamado *vórtice libre*.

En términos de la circulación Γ, se tiene pues, para un vórtice libre,

$$\boxed{\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\,\theta,} \qquad (5\text{-}57)$$

$$\boxed{\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\; ln\, r,} \qquad (5\text{-}58)$$

o sea una velocidad definida por

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\;\frac{1}{r}\;, \quad u_r = 0. \qquad (5\text{-}59)$$

5.9 Flujo alrededor de un cilindro con circulación

Utilizando de nuevo la propiedad de superposición, se puede ahora "construir" un flujo potencial alrededor de un cilindro donde la simetría haya sido rota, dando lugar así a una fuerza neta.

Sea en efecto el flujo que se puede definir superponiendo el flujo ya estudiado sobre un cilindro de radio r_0, con el flujo debido a un vórtice girando con las agujas del reloj.

El potencial de velocidades y la función de corriente serían en este caso:

$$\boxed{\varphi = (r + \frac{r_0^2}{r})\; U_0 \cos\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\;\theta} \qquad (5\text{-}60)$$

$$\psi = (r - \frac{r_0^2}{r})\, U_0 \text{ sen } \theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\, ln\, r. \qquad (5\text{-}61)$$

Es fácil ver que este flujo mantiene la existencia de una línea de corriente circular de radio r_0. Tómese en efecto la línea correspondiente a

$$\psi_0 = \frac{\Gamma}{2\pi}\, ln\, r_0$$

Entonces

$$\frac{\Gamma}{2\pi}\, ln\, r_0 = (r - \frac{r_0^2}{r})\, U_0 \text{ sen } \theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\, ln\, r. \qquad (5\text{-}62)$$

es la ecuación de una línea de corriente, constituida en parte por

$$r = r_0\,, \quad \theta \text{ cualquiera.}$$

Las componentes de la velocidad son dadas por

$$u_r = (1 - \frac{r_0^2}{r^2})\, U_0 \cos\theta\,, \qquad (5\text{-}63)$$

$$u_\theta = -(1 + \frac{r_0^2}{r^2})\, U_0 \text{ sen } \theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\, \frac{1}{r}\,. \qquad (5\text{-}64)$$

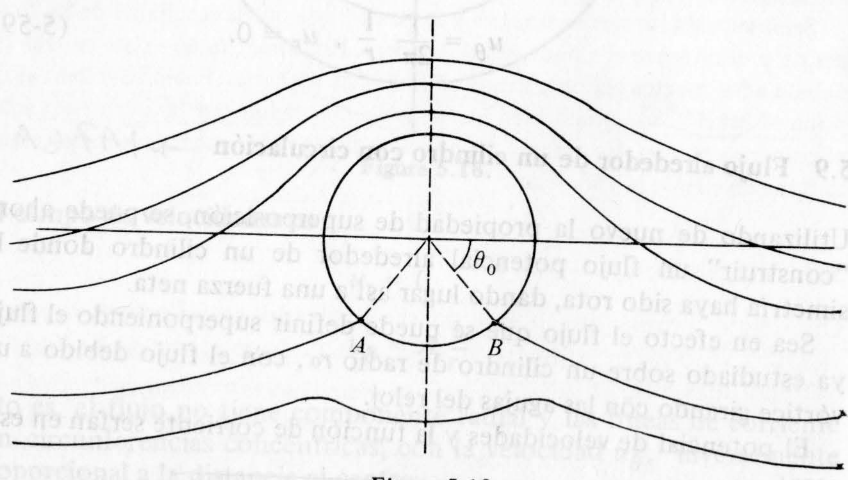


Figura 5.19.

La figura indica la forma de las líneas de corriente definidas por (5.61). De interés especial resultan aquellas que presentan *un punto de estancamiento* y que corresponden a ψ_0. Una manera fácil de determinar la posición de estos puntos es de estudiar la velocidad del fluido (recuérdese que es ideal) sobre el cilindro.

Haciendo $r = r_0$, se tiene

$$u_r = 0$$
$$u_\theta = -2\, U_0 \text{ sen } \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\,, \quad u_r = 0,$$

como expresión de esta velocidad, y se ve que los puntos de estancamiento ($u_0 = 0$) están ubicados en

$$\text{sen } \theta_0 = -\frac{\Gamma}{4\pi\, r_0\, U_0}\,. \qquad (5\text{-}65)$$

La distribución de presiones sobre el cilindro es también importante. Aplicando el teorema de Bernoulli se obtiene

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\,\rho\, U_0^2\; [1 - (2 \text{ sen } \theta + \frac{\Gamma}{2\pi\, r_0 U_0})^2\,].$$

Esta distribución ya no es simétrica, con respecto al eje AB. Ahora se obtiene un bulbo de presiones como el indicado.

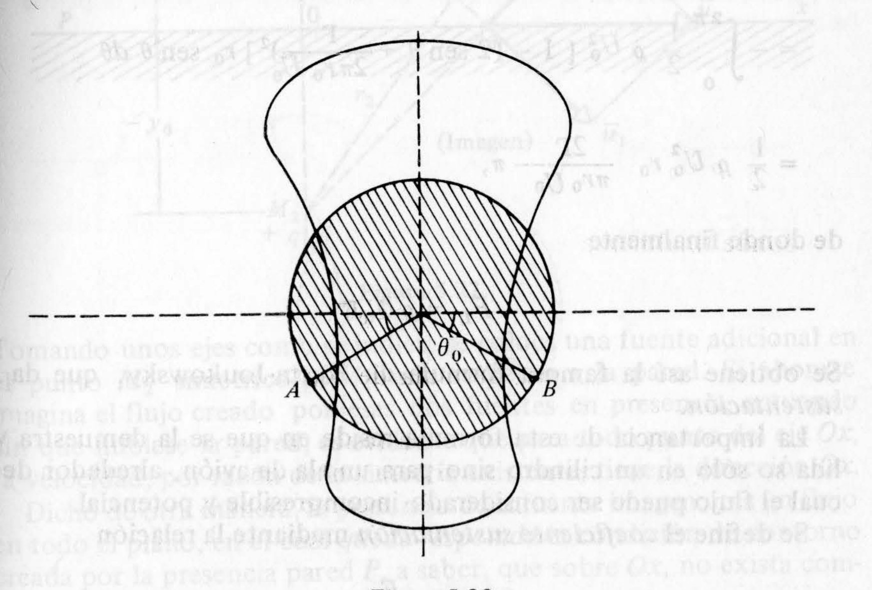


Figura 5.20.

Esta situación conduce a una fuerza neta sobre el cilindro llamada *sustentación* (lift) y representada por F_L. Para determinarla, basta encontrar la fuerza elemental sobre un elemento de superficie del ci-

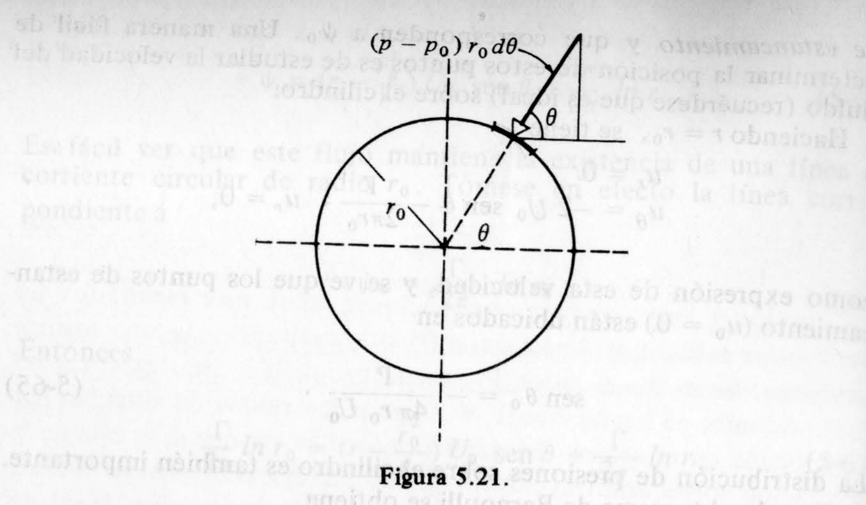


Figura 5.21.

lindro y de proyectar verticalmente, sumando entonces sobre toda la superficie.

$$F_L = -\int_0^{2\pi} (p - p_0)\, r_0 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, \rho\, U_0^2 \left[1 - (2 \operatorname{sen}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0 U_0})^2 \right] r_0 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\, \rho\, U_0^2\, r_0 \;\; \frac{2\Gamma}{\pi r_0 U_0}\, \pi,$$

de donde finalmente

$$F_L = \rho\, U_0 \Gamma.$$

Se obtiene así la famosa fórmula de Kutta-Joukowsky, que da la *sustentación.*

La importancia de esta fórmula reside en que se la demuestra válida so sólo en un cilindro sino para un ala de avión, alrededor de la cual el flujo puede ser considerado incompresible y potencial.

Se define el *coeficiente sustentación* mediante la relación

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\, \rho\, U_0^2 A},$$

donde A es la proyección del área del cilindro (en este caso) sobre un plano perpendicular a la dirección general del flujo. En el presente

caso se tendría pues

$$C_L = \frac{\Gamma}{U_0 r_0}.$$

5.10 Método de las imágenes

Otro uso muy rico en aplicaciones del método de superposición consiste en definir flujos mediante la acción conjunta de fuentes, sumideros,etc. que se colocan simétricamente con respecto a un plano. Por esta razón se llama el método de las imágenes, y se demostrará su aplicación en un ejemplo concreto.

Sea a estudiar el flujo potencial debido a una fuente $+q$ colocada en un punto M_1, *en presencia de una pared P*

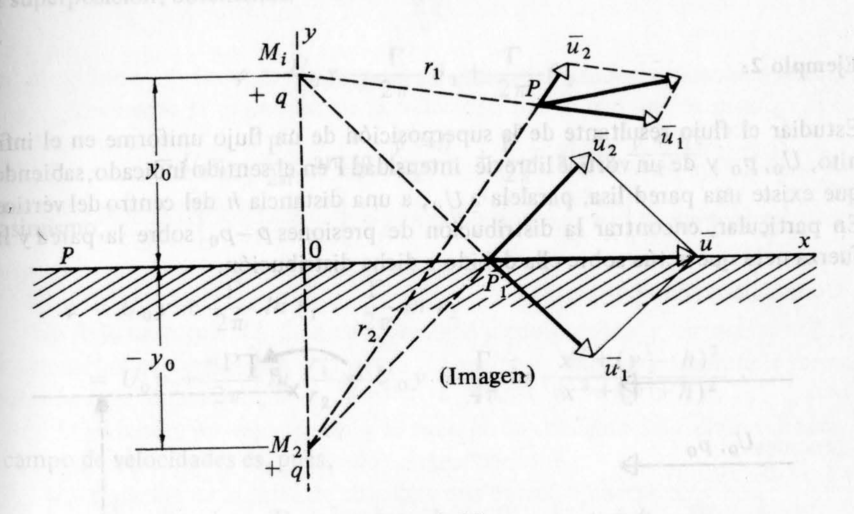


Figura 5.22.

Tomando unos ejes como se indica, se coloca una fuente adicional en el punto M_2 simétrico al M_1 con respecto a la pared. Si ahorase imagina el flujo creado por esas dos fuentes en presencia, actuando sin que hubiese la pared, es evidente que para todo punto del eje Ox, a velocidad, por razón de la simetría existente, tiene la dirección Ox.

Dicho de otra manera, la presencia de la fuente imagen crea un flujo en todo el plano, en el cual *queda respetada* la condición de contorno creada por la presencia pared P, a saber, que sobre Ox, no exista componente de la velocidad perpendicular a P.

El flujo ficticio de la fuente $+q$ y de su imagen es pues exactamente el mismo que el flujo verdadero de la fuente $+q$ en presencia de la pared dada, por lo menos en la razón de interés, esto es, para $y > 0$.

Hechas estas consideraciones, se puede escribir inmediatamente el potencial de velocidades del problema planteado,

$$\varphi = \frac{q}{2\pi}\ ln\ r_1 + \frac{q}{2\pi}\ ln\ r_2$$

Es conveniente expresar ese potencial en coordenadas cartesianas, observando que

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2} \qquad r_2 = \sqrt{x^2 + (y + y_0)^2}.$$

Luego

$$\varphi = \frac{q}{4\pi}\ ln\ [x^2 + (y - y_0)^2]\,[x^2 + (y + y_0)^2].$$

Ejemplo 2:

Estudiar el flujo resultante de la superposición de un flujo uniforme en el infinito, U_0, p_0 y de un vórtice libre de intensidad Γ en el sentido indicado, sabiendo que existe una pared lisa, paralela a U_0, a una distancia h del centro del vértice. En particular, encontrar la distribución de presiones $p - p_0$ sobre la pared y la fuerza neta que actúa sobre ella debido a dicha distribución.

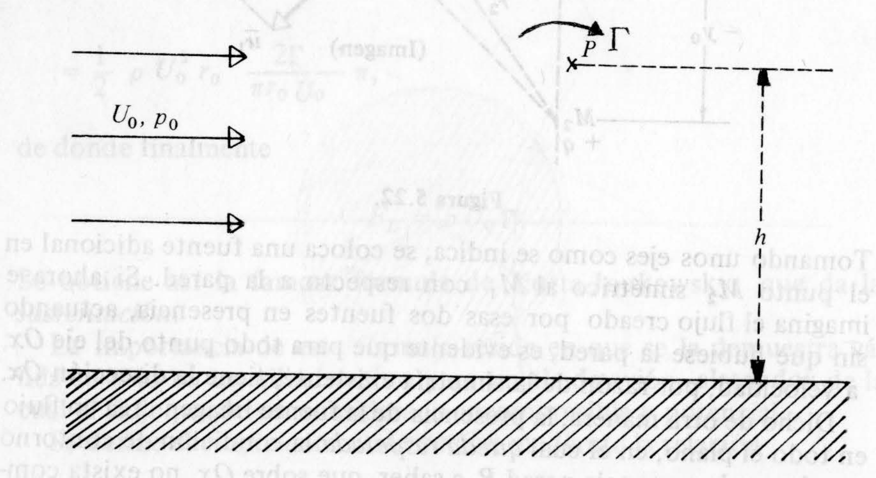


Figura 5.23.

La existencia de la pared obliga a considerar un flujo que sea la superposición del flujo uniforme, del vórtice dado y de otro simétrico de éste con respecto a la pared. De esta manera, por razón de la evidente simetría, la pared constituye una línea de corriente y la condición de contorno queda satisfecha.

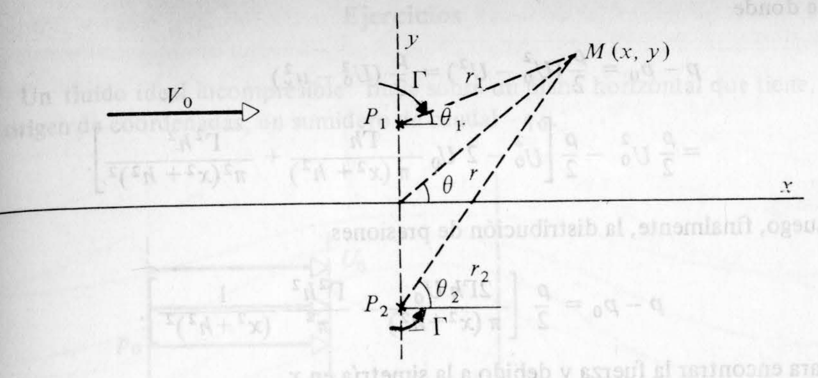


Figura 5.24.

Por superposición, obtenemos

$$\varphi = U_0 x - \frac{\Gamma}{2\pi}\theta_1 + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta_2$$

$$= U_0 x - \frac{\Gamma}{2\pi}\ \text{arc tg}\ \frac{y - h}{x} + \frac{\Gamma}{2\pi}\ \text{arc tg}\ \frac{y + h}{x}$$

y, asimismo,

$$\psi = U_0 y + \frac{\Gamma}{2\pi}\ ln\ r_1 - \frac{\Gamma}{2\pi}\ ln\ r_2$$

$$= U_0 y + \frac{\Gamma}{2\pi}\ ln\ \frac{r_1}{r_2} = U_0 y + \frac{\Gamma}{4\pi}\ ln\ \frac{x^2 + (y - h)^2}{x^2 + (y + h)^2},$$

El campo de velocidades es, pues,

$$u_x = U_0 + \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{y - h}{x^2 + (y - h)^2} - \frac{y + h}{x^2 + (y + h)^2}\right],$$

$$u_y = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{x}{x^2 + (y - h)^2} - \frac{x}{x^2 + (y + h)^2}\right].$$

Para los puntos del plano $y = 0$, se obtiene

$$u_x = U_0 - \frac{\Gamma h}{\pi (x^2 + h^2)},$$

$$u_y = 0.$$

La distribución de presiones sobre el plano se calcula mediante el teorema de Bernoulli

$$\frac{U_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \frac{U^2}{2} + \frac{p}{\rho}$$

de donde

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2}(U_0^2 - U^2) = \frac{\rho}{2}(U_0^2 - u_x^2)$$

$$= \frac{\rho}{2}U_0^2 - \frac{\rho}{2}\left[U_0^2 - 2\,U_0\,\frac{\Gamma h}{\pi\,(x^2+h^2)} + \frac{\Gamma^2 h^2}{\pi^2 (x^2+h^2)^2}\right].$$

Luego, finalmente, la distribución de presiones

$$p - p_0 = \frac{\rho}{2}\left[\frac{2\Gamma h\,U_0}{\pi\,(x^2+h^2)} - \frac{\Gamma^2 h^2}{\pi^2}\,\frac{1}{(x^2+h^2)^2}\right].$$

Para encontrar la fuerza y debido a la simetría en x,

$$F = -2\int_0^\infty (p-p_0)\,dx.$$

Se hace necesario calcular las siguientes integrales,

$$\int\frac{dx}{x^2+h^2} = \frac{1}{h}\ \text{arc tg}\ \frac{x}{h}$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+h^2)^2} = \int\frac{x^2+h^2-x^2}{h^2(x^2+h^2)^2}\,dx = \frac{1}{h^2}\int\frac{dx}{x^2+h^2} - \int\frac{x^2}{h^2(x^2+h^2)^2}\,dx.$$

Como, integrando por partes,

$$\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+h^2)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+h^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+h^2}$$

tenemos

$$\int\frac{dx}{(x^2+h^2)^2} = \frac{1}{h^2}\int\frac{dx}{x^2+h^2} - \frac{1}{h^2}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+h^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+h^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2h^3}\ \text{arc tg}\ \frac{x}{h} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{h^2}\,\frac{x}{x^2+h^2}$$

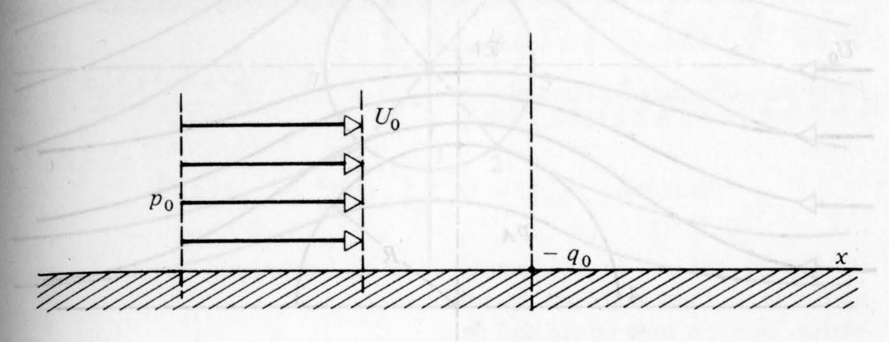
La fuerza que actúa sobre la placa será pues

$$F = -2\int_0^\infty (p-p_0)\,dx = -2\left\{\frac{\rho\,\Gamma h\,U_0}{\pi}\ \text{arc tg}\ \frac{x}{h} - \frac{\rho\,\Gamma^2 h^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{2\,h^3}\ \text{arc tg}\,\frac{x}{h} + \frac{1}{2\,h^2}\,\frac{x}{x^2+h^2}\right)\right\}_0^\infty$$

$$F = -\rho\,\Gamma\,U_0 + \frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h}$$

Ejercicios

1. Un fluido ideal incompresible fluye sobre un plano horizontal que tiene, en el origen de coordenadas, un sumidero de caudal $-q_0$.



En el infinito el flujo es paralelo y de velocidad uniforme U_0. Se pide:

a. Encontrar la expresión de la velocidad del fluido en los puntos de la pared, en función de x.

b. Determinar la distribución de presiones sobre la pared y dibujar la curva representativa de la variación.

Respuesta: $p - p_0 = \rho q_0/2\pi\,(-2U_0/x + q_0/2\pi x^2)$

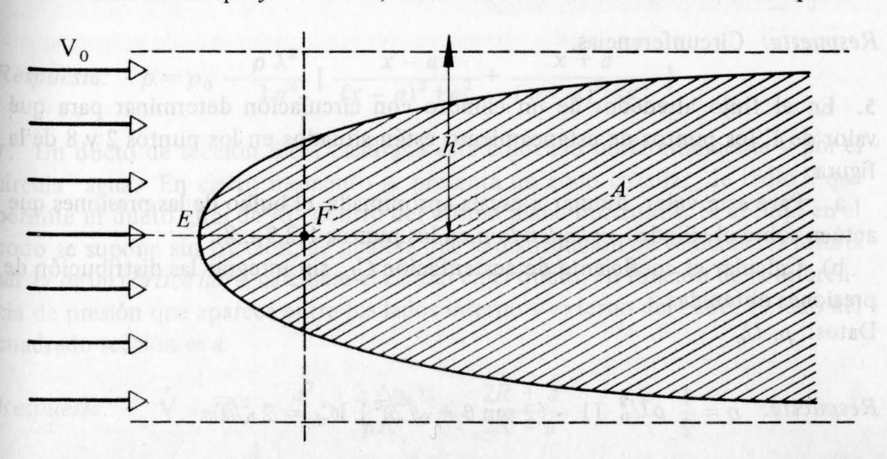
2. Un flujo uniforme U_0 de un fluido ideal incompresible y un manantial F de intensidad q, determinan un cuerpo A, que tiene aproximadamente la forma indicada. Determinar:

a. El potencial de velocidades y la función de corriente del flujo resultante.

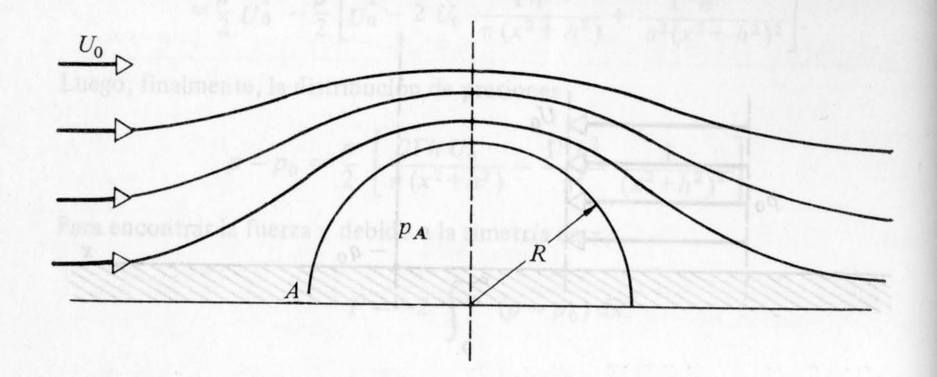
b. Las coordenadas del punto de estancamiento E.

c. La ecuación de la línea de corriente que define el cuerpo A.

d. Recordando que $y = r$ sen θ, encontrar la altura máxima h del cuerpo.



3. El techo semicircular de un galpón está colocado sobre un terreno completamente horizontal. El viento sopla sobre el galpón según un flujo uniforme con velocidad de acercamiento U_0, tal como indica la figura. Si la presión en el interior del galpón es la presión de estancamiento p_A, y



admitiendo que el flujo es irrotacional y que los efectos viscosos son despreciables , se pide:

a. Determinar la distribución de presiones en la superficie exterior del techo del galpón.

b. Encontrar la fuerza vertical con la cual aire trata de levantar el techo.

Respuesta: $p = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \; (1 - 4 \,\text{sen}^2 \theta); F_y = -\frac{8}{3} R \rho U_0^2$

4. Una fuente y un sumidero bidimensionales de igual intensidad λ, están ubicados en los puntos $A\ (a,\ 0)$ y $A'\ (-a,\ 0)$, con respecto a un sistema de coordenadas Oxy. Determinar las líneas de corriente y las líneas equipotenciales del flujo resultante.

Respuesta: Circunferencias.

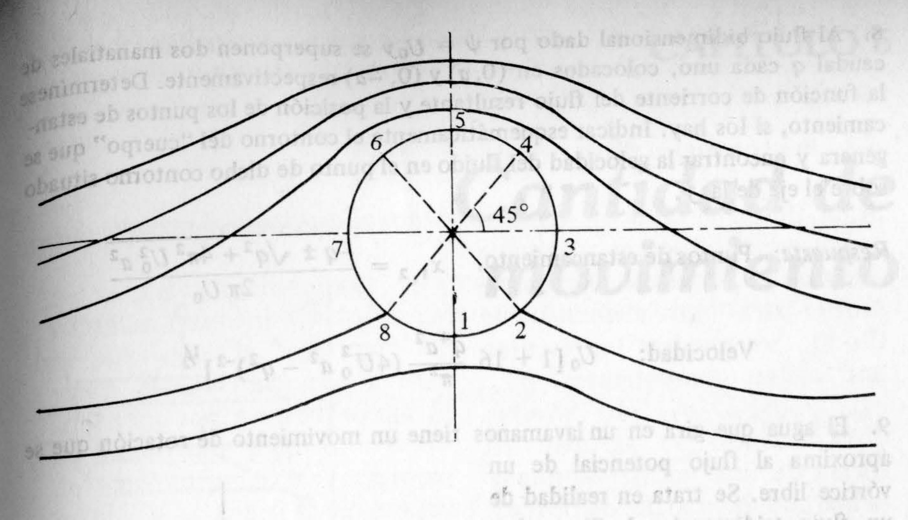
5. En el flujo alrededor de un cilindro con circulación determinar para qué valor de Γ los puntos de estancamiento están situados en los puntos 2 y 8 de la figura.

a. Para este valor, dibujar a escala aproximada, el bulbo de las presiones que actúan sobre el cilindro, *calculando p* en los puntos 1,2,3,...8.

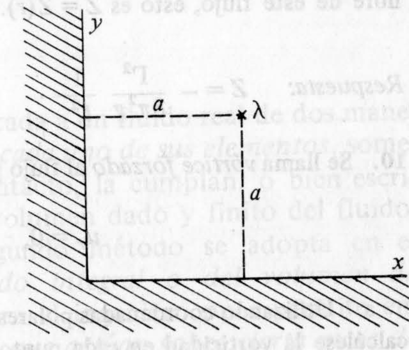
b) Calcular el coeficiente de sustentación C_L, sin integrar las distribución de presiones obtenidas.

Datos: $\rho,\ U_0$.

Respuesta: $p = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \; [1 - (2 \,\text{sen}\, \theta + \sqrt{2})^2],\ C_L = 2\sqrt{2}\,\pi$



6. Se coloca una fuente bidimensional de intensidad λ por unidad de longitud en una esquina rectangular, formada por dos paredes planas e infinitas. Si la fuente dista a de cada pared, se pregunta, suponiendo el fluido ideal e incompresible:



a. ¿Cuál es la velocidad resultante a lo largo de la pared horizontal, en función de la distancia x a la esquina, suponiendo el flujo permanente?

b. Determinar la distribución de la presión a lo largo de dicha pared, suponiendo conocida la presión p_0 en el infinito. Representar gráficamente esa variación.

Respuesta: $p = p_0 - \frac{\rho \lambda^2}{2\pi^2} \left[\frac{x - a}{(x - a)^2 + a^2} + \frac{x + a}{(x + a)^2 + a^2} \right]$

7. Un ducto de sección recta cuadrada está colocado horizontalmente y por él circula agua. En cierto momento se presenta un codo circular, de radio R que permite el ducto girar de 90° dentro del mismo plano horizontal. Si el flujo en el codo se supone sin fricción, de manera que la distribución de velocidades resulta ser la de un *vórtice libre*, calcúlese el *caudal* en el ducto, en función de la diferencia de presión que aparece entre los lados interno y externo del codo. El lado del cuadrado sección es a.

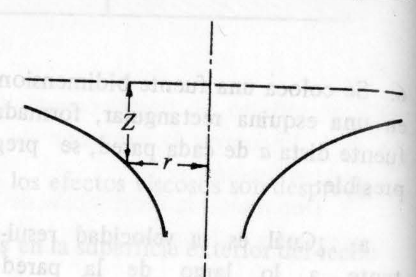
Respuesta: $\dot{V} = (R^2 - \frac{a^2}{4}) \left(\frac{a \Delta p}{\rho R}\right)^{1/2} \ln \frac{2R + a}{2R - a}$

8. Al flujo bidimensional dado por $\psi = U_0 y$ se superponen dos manatiales de caudal q cada uno, colocados en $(0, a)$ y $(0, -a)$ respectivamente. Determínese la función de corriente del flujo resultante y la posición de los puntos de estancamiento, si los hay. Indicar esquemáticamente el contorno del "cuerpo" que se genera y encontrar la velocidad del fluido en el punto de dicho contorno situado sobre el eje de las y.

Respuesta: Puntos de estancamiento, $x_{1,2} = \dfrac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\pi^2 U_0^2 a^2}}{2\pi U_0}$

Velocidad: $U_0 \left[1 + 16 \dfrac{q^4 a^2}{\pi^2} (4U_0^2 a^2 - q^2)^{-2}\right]^{1/2}$

9. El agua que gira en un lavamanos tiene un movimiento de rotación que se aproxima al flujo potencial de un vórtice libre. Se trata en realidad de un flujo tridimensional. Si se desprecian las componentes radial y vertical de la velocidad, se pide determinar la forma de la superficie libre de este flujo, esto es $Z = Z(r)$.



Respuesta: $Z = -\dfrac{\Gamma^2}{8\pi^2 g} \dfrac{1}{r^2}$.

10. Se llama *vórtice forzado* al flujo plano definido por el campo de velocidades

$$u_r = 0, \quad u_\theta = \frac{U_0}{r_0}\, r$$

a. Utilizando coordenadas polares, muéstrese que este flujo no es potencial y calcúlese la vorticidad en cada punto. Muéstrese que puede existir una función de corriente, la cual se determinará.

b. Utilizando coordenadas cartesianas, responder a las mismas preguntas.

Respuesta: $\xi_z = 2 \dfrac{U_0}{r_0}, \ \psi = -\dfrac{U_0}{r_0} \dfrac{r^2}{2} + C = -\dfrac{1}{2} \dfrac{U_0}{r_0} (x^2 + y^2) + C.$

Se recordará que, en coordenadas cilíndricas,

$$\nabla \cdot \bar{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\, u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\bar{\xi} = \nabla \times \bar{u} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \bar{\epsilon}_r & r\bar{\epsilon}_\theta & \bar{\epsilon}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_r & r u_\theta & u_z \end{vmatrix}$$

CAPITULO 6

Cantidad de movimiento

6.1 Introducción

LA LEY de Newton puede ser aplicada a un fluido real de dos maneras distintas, a saber, haciendo que *cada uno de sus elementos*, sometidos a fuerzas de campo y de contacto, la cumplan, o bien escribiendo que ésta se verifica en un volumen dado y finito del fluido, escogido arbitrariamente. Este segundo método se adopta en el presente capítulo: llamado *método integral o del volumen de control*, tiene gran importancia para el ingeniero pues permite encontrar las *fuerzas y los momentos que actúan sobre cierta masa de un fluido dado,* sin que necesariamente haya de penetrar en el conocimiento detallado (distribución de velocidades, de presiones, etc.) del movimiento.

Por esta razón se empieza el estudio de los fluidos reales con el concepto de la "cantidad de movimiento" de una masa de fluido y de las fuerzas que la generan: se trata de leyes generales que no requieren la especificación del tipo de fluido (viscoso o no, newtoniano o no) al cual se refieren, ya que no son otra cosa sino enunciados modificados de las leyes de Newton, aplicables a un sitema material cualquiera.

Antes de empezar, sin embargo, convendrá ampliar la definición de presión en un fluido, establecido, hasta ahora tan sólo en la hipótesis que no existen esfuerzos cortantes, ya sea por que el fluido está en

reposo o bien porque es ideal. Hecho esto se podrán evaluar debidamente las fuerzas que actúan sobre el volumen de fluido dado.

6.2 Presión en un fluído viscoso

Si un fluido viscoso (newtoniano o no) se está moviendo, se generan en su seno esfuerzos normales y cortantes. Estos esfuerzos, descritos para un elemento de fluido, se pueden representar por nueve componentes σ_{xx}, τ_{xy}, σ_{yy}, τ_{yx}, σ_{zz} etc. Si estas componentes se agrupan en forma de una matriz, se puede hablar de la matriz de los esfuerzos $\overline{\overline{\sigma}}$, dada por

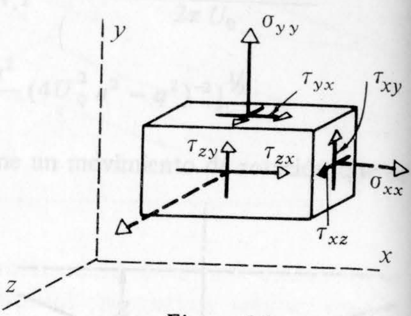


Figura 6.1.

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}1)$$

Como se ve, los esfuerzos normales que actúan sobre las tres caras del elemento ya no son iguales, de manera que la noción de presión p pierde aparentemente su significado.

Puede observarse, sin embargo que la suma de los tres esfuerzos normales es invariante cuando se reorienta al elemento de fluido mediante una rotación cualquiera. Esto es, se tiene

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'},$$

donde los ejes $0_{x'y'z'}$ permanecen ortogonales entre sí pero han girado con respecto al sistema 0_{xyz}. La demostración de esta propiedad se deja como ejercicio.[1] En vista de (2-2) se puede definir la presión como

$$p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

ya que tiene entonces sentido hablar del valor de p en un punto.

De esta manera se salva el obstáculo de la diferencia de esfuerzos normales en las caras de un elemento de fluido real en movimiento.

[1] E. Levi, Elementos de Mecánica del Medio Continuo, Limusa.

Cuando se estudien más adelante los fluidos viscosos newtonianos se completará este estudio de los esfuerzos internos. Por el momento basta saber que el concepto de presión puede seguir siendo usado sin temor a contradicción.

6.3 Fuerza y cantidad de movimiento

Se va a considerar ahora la aplicación de la ley de Newton a un volumen finito de fluido en movimiento. Por ejemplo puede tratarse de averiguar la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un volumen determinado de fluido que pasa por el codo de una tubería. Y recíprocamente, si se aplica la tercera ley de Newton, de ahí se podrá deducir la fuerza que actúa *sobre el codo* debido al flujo.

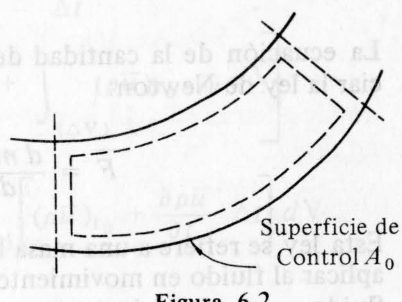
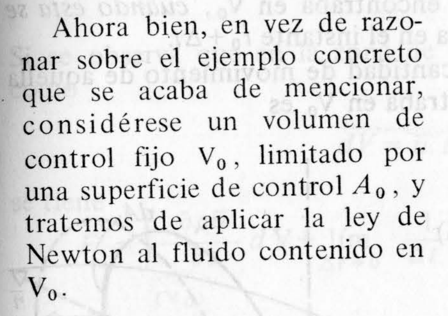


Figura 6.2.

Ahora bien, en vez de razonar sobre el ejemplo concreto que se acaba de mencionar, considérese un volumen de control fijo V_0, limitado por una superficie de control A_0, y tratemos de aplicar la ley de Newton al fluido contenido en V_0.



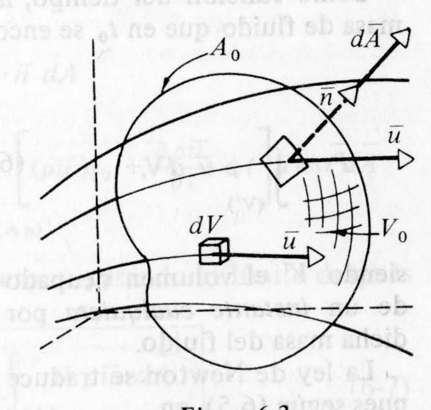


Figura 6.3.

La cantidad de movimiento que el fluido contenido en V_0 posee es

$$\overline{P} = \int_{(V)} \rho\, \overline{u} \cdot dV, \qquad (6\text{-}2)$$

Por otra parte, el caudal *neto* en masa del fluido que *sale* del volumen de control es dado por (3-5),

$$\dot{m} = \int_{(A)} \rho\, \overline{u} \cdot d\overline{A}\,.$$

y el flujo de la cantidad de movimiento del fluído que atraviesa la superficie de control se puede expresar como

$$\overline{P}_f = \int_{(A)} \overline{u} \ \rho \ \overline{u} \cdot d\overline{A}, \qquad (6\text{-}3)$$

de manera que

$$d\,\overline{P}_f = \overline{u}\ d\dot{m}, \qquad (6\text{-}4)$$

La ecuación de la cantidad de movimiento es otra manera de enunciar la ley de Newton:

$$\overline{F} = \frac{d\,m\,\overline{u}}{dt} = \frac{d\overline{P}}{dt} \qquad (6\text{-}5)$$

Esta ley se refiere a una masa bien definida de materia. Si se la quiere aplicar al fluido en movimiento, es necesario seguir una masa dada del fluido, que en un instante t_0 se encontraba en V_0, *cuando ésta se mueve* y pasa a una posición vecina en el instante $t_0 + \Delta t$.

Como función del tiempo, la cantidad de movimiento de aquella masa de fluido que en t_0 se encontraba en V_0 es

$$\overline{P} = \int_{(V')} \rho\,\overline{u}\,dV, \qquad (6\text{-}6)$$

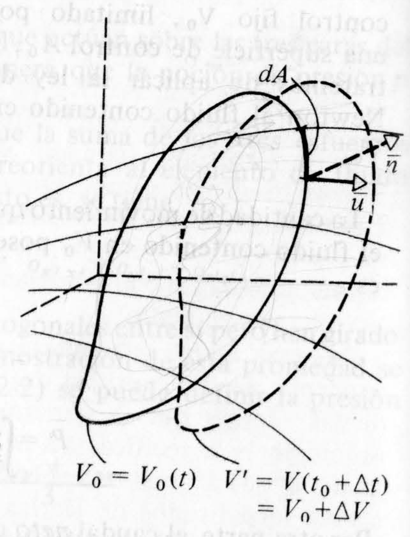


Figura 6.4.

siendo V' el volumen ocupado de un *instante cualquiera* por dicha masa del fluido.

La ley de Newton se traduce pues según (6.5), en

$$\overline{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \overline{P}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\displaystyle\int_{V_0+\Delta V} (\rho\overline{u})_{t_0+\Delta t}\,dV - \int_{(V_0)} (\rho\,\overline{u})_{t_0}\,dV}{\Delta t}$$

Ahora bien, se puede escribir

$$(\rho\,\overline{u})_{t_0+\Delta t} = (\rho\,\overline{u})_{t_0} + \frac{\partial(\rho\,\overline{u})}{\partial t}\,\Delta t + \cdots$$

de donde sucesivamente,

$$\overline{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\displaystyle\int_{(V_0)} [(\rho\overline{u})_{t_0+\Delta t} - (\rho\overline{u})_{t_0}]\,dV + \int_{(\Delta V)} (\rho\overline{u})_{t_0+\Delta t}\,dV}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{(V_0)} \frac{\partial\rho\overline{u}}{\partial t}\,\Delta t\,dV + \int_{(\Delta V)} (\rho\overline{u})_{t_0+\Delta t}\,dV\right]$$

$$= \int_{(V_0)} \frac{\partial\rho\overline{u}}{\partial t}\,dV + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{(\Delta V)}\left[(\rho\overline{u})_{t_0} + \frac{\partial\rho\overline{u}}{\partial t}\,\Delta t\right] dV$$

Si se observa que en la zona de ΔV el volumen se puede expresar como

$$dV = \overline{u}\ \Delta t \cdot \overline{n}\ dA$$

se tiene

$$\overline{F} = \int_{(V_0)} \frac{\partial\rho\overline{u}}{\partial t}\,dV + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\int_{(A_0)}\left[(\rho\overline{u})_{t_0} + \frac{\partial\rho\overline{u}}{\partial t}\,\Delta t\right]\overline{u}\ \Delta t\ d\overline{A}$$

de donde simplificando por Δt primero, y pasando al límite después

$$\boxed{\overline{F} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{(V_0)} \rho\overline{u}\,dV + \int_{(A)} \overline{u}\ \rho\overline{u} \cdot d\overline{A},} \qquad (6\text{-}7)$$

Recordando (6.3) se puede enunciar esta propiedad como: *La suma de todas las fuerzas que actúan sobre un volumen cualquiera* V_0 *de fluido en movimiento es igual a la tasa de cambio de la cantidad de movimiento del fluido en* V_0, *más el flujo de la cantidad de movimiento del fluido que atraviesa el contorno* A_0 *de* V_0.

Más brevemente,

$$\overline{F} = \frac{\partial\overline{P}}{\partial t} + \overline{P}_f \qquad (6\text{-}8)$$

Si se quiere escribir esta ley en términos de sus componentes sobre tres ejes cartesianos se tiene

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{(V_0)} \rho u_x \, dV + \int_{(A_0)} u_x \rho \bar{u}\cdot d\bar{A}, \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{(V_0)} \rho u_y \, dV + \int_{(A_0)} u_y \, \rho \bar{u}\cdot d\bar{A}, \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{(V_0)} \rho u_z \, dV + \int_{(A_0)} u_z \, \rho \bar{u}\cdot d\bar{A}, \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}9)$$

donde además $\rho\bar{u}\cdot d\bar{A} = dm$ es, simplemente, la diferencial del caudal en masa.

Estas leyes habrán de permitir la evaluación de las fuerzas que actúan sobre sistemas mecánicos por los cuales circulan fluidos en movimiento. Se van a ver ahora algunos ejemplos de ello.

Ejemplo 1:

Un codo reductor de 60° está colocado horizontalmente. Sus características y otros datos de funcionamiento son los siguientes:

Entrada: Diámetro $D_1 = 0.6$ m, velocidad $u_1 = 5$ m/seg
presión $p_1 = 1.5$ bar

Salida: Diámetro $D_2 = 0.5$ m

Determinar los componentes según los ejes Ox, Oy, de la fuerza que el fluido (H_2O) que circula por la tubería ejerce sobre el codo.

Se trata de un flujo permanente. La ecuación de la cantidad de movimiento se escribe pues

$$\bar{F} = \int_{(A_0)} \bar{u} \, \rho\bar{u}\cdot d\bar{A}$$

esto es

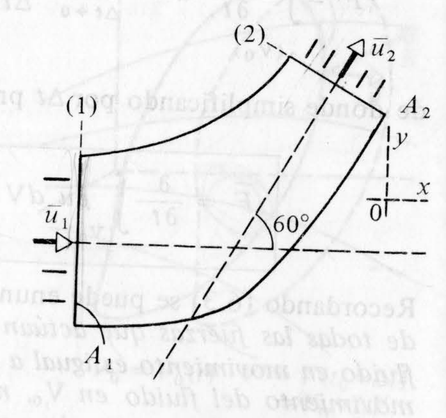


Figura 6.5.

$$\bar{F} = \int_{(A_2)} \bar{u} \, \rho\bar{u}\cdot d\bar{A} + \int_{(A_1)} \bar{u} \, \rho\bar{u}\cdot d\bar{A}$$

Dado que ρ es constante y que el enunciado implica que la distribución de velocidades en cada sección es uniforme, se tiene

$$\bar{F} = \rho \dot{V} (\bar{u}_2 - \bar{u}_1),$$

donde

$$\dot{V} = U_1 A_1 = U_2 A_2$$

es el caudal en volumen

Expresada sobre los ejes de coordenadas esta fórmula se escribe:

$$F_x = \rho\dot{V}\,(u_{2x} - u_{1x}),$$

$$F_y = \rho\dot{V}\,(u_{2y} - u_{1y}).$$

Para aplicar estas dos expresiones, se hacen los siguientes cálculos previos:

a. Determinación de u_2: De la ecuación de continuidad se tiene

$$\dot{V} = u_1 A_1 = 5 \times \frac{\pi}{4} \times 0.6^2 = 5 \times 0.283 = 1.42 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

de donde

$$u_2 = \frac{\dot{V}}{A_2} = \frac{1.42}{\frac{\pi}{4}\,0.5^2} = \frac{1.42}{0.196} = 7.25 \text{ m/seg}.$$

b. Determinación de p_2: Del teorema de Bernoulli, suponiendo que no hay pérdidas

$$\frac{U_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{U_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho},$$

o sea

$$\frac{5^2}{2} + \frac{1.5 \times 10^5}{1000} = \frac{7.25^2}{2} + \frac{p_2}{\rho},$$

de donde

$$\frac{p_2}{\rho} = 12.5 + 150 - 26.3 = 136{,}2 \ \frac{\text{N.m}}{\text{kg}}$$

$$= 136{,}2 \ \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

o sea

$$p_2 = 1.362 \times 10^5 \frac{N}{m^2} = 1.362 \text{ bar}.$$

Hecho esto y dibujando un diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre el fluido contenido en el codo, se tiene

$$p_1 A_1 - R_x - p_2 A_2 \cos\theta = 1000 \times 1.42\,(7.25 \cos\theta - 5),$$

$$R_y - p_2 A_2 \text{ sen } \theta = 1000 \times 1.42\,(7.25 \text{ sen } \theta - 0).$$

De donde, efectuando los cálculos

$$R_x = 1.5 \times 10^5 \times 0.283 - 1.362 \times 10^5 \times 0.196 \times \frac{1}{2} + 1000 \times 1.42 \times 1.38$$

$$= 0.425 \times 10^5 - 0.133 \times 10^5 + 1.96 \times 10^3 = 31100\ N = \underline{310 \text{ daN}}$$

$$R_y = 1.362 \times 10^5 \times 0.196 \times 0.866 + 1000 \times 1.42 \times 7.25 \times 0.866$$

$$= 0.2280 \times 10^5 + 8.95 \times 10^3 = 31750\ N = \underline{3175 \text{ daN}}$$

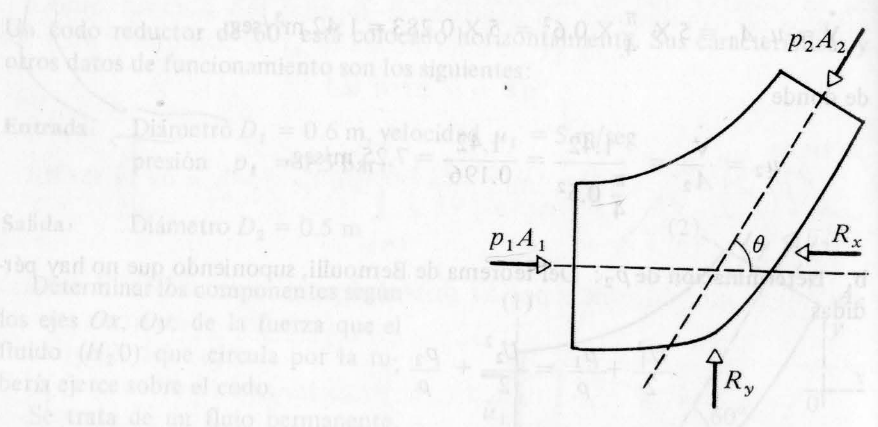


Figura 6.6.

Ejemplo 2:

Un turbomotor a chorro colocado en un túnel de viento recibe aire a la velocidad de 130 m/seg. a la presión de 0.9 bar. y de densidad $\rho = 1.2$ kg/m^3. La distribución de la velocidad del chorro de entrada es uniforme y el área transversal 0.1m^2.

A la salida del turbomotor, la velocidad del chorro de escape no es uniforme, sino dada por

$$u = 2\,U_0\,\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

donde r_0 es el radio de la sección recta del chorro y $U_0 = 600$ m/seg. La presión media en el chorro de escape es de 1.2 bar y su densidad $\rho = 0.6 \frac{kg}{m^3}$.

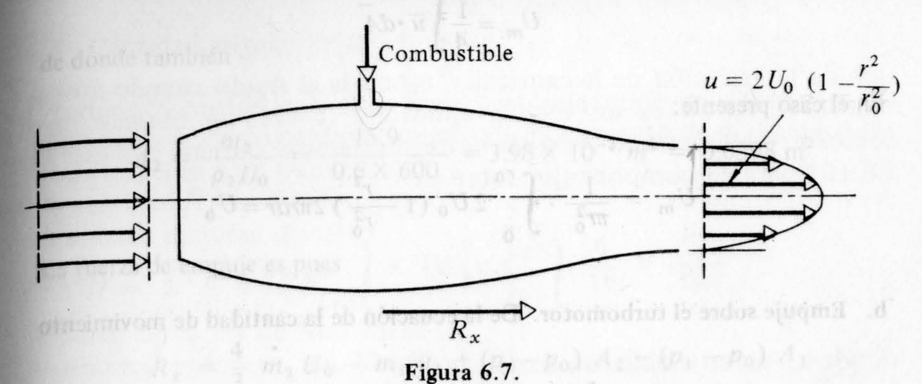


Figura 6.7.

Si además se sabe que la cantidad de combustible introducido (lateralmente) corresponde al 2% de la masa de aire que circula, se pregunta.

a) Mostrar que U_0 es la velocidad media del chorro de escape y determinar la velocidad máxima.

b) Encontrar el empuje R_x sobre el turbomotor.

c) ¿Cuál sería el empuje si el chorro de escape hubiese tenido una velocidad uniforme U_0?

La presión atmosférica circulante es 1bar.

(Los datos están indicados en la figura adjunta).

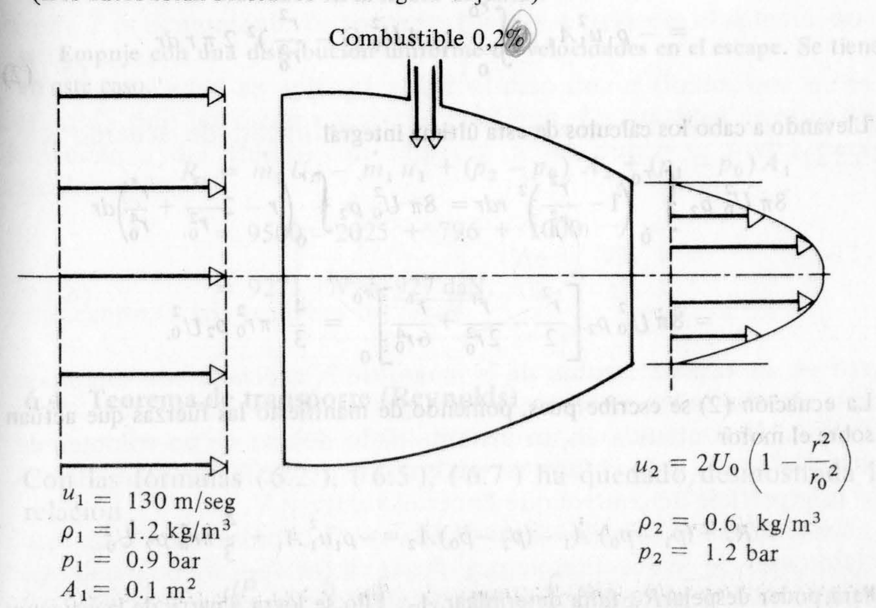


Figura 6.8.

a. **Velocidad media.** Por definición, la velocidad media es

$$U_m = \frac{1}{A}\int \bar{u}\cdot d\bar{A}$$

En el caso presente:

$$U_m = \frac{1}{\pi r_0^2}\cdot\int_0^{r_0} 2U_0\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)2\pi r\,dr = U_0$$

b. **Empuje sobre el turbomotor.** De la ecuación de la cantidad de movimiento

$$F = \frac{\partial}{\partial t}\int_{(V_0)} \rho\bar{u}\,dV + \int_{(A_0)} \bar{u}\,\rho\bar{u}\cdot d\bar{A}\,,$$

Se obtiene en el presente caso, ya que el flujo es permanente

$$F_x = -\int_{(A_1)} u_1\rho_1 u_1\,dA_1 + \int_{(A_2)} u_2\,\rho_2\,u_2\,dA_2$$

$$= -\rho_1 u_1^2 A_1 + \int_0^{r_0}\rho_2\,4U_0^2\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)^2 2\pi r\,dr \qquad (2)$$

Llevando a cabo los cálculos de esta última integral

$$8\pi U_0^2\rho_2\int_0^{r_0}\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)^2 r\,dr = 8\pi U_0^2\rho_2\int_0^{r}\left(r-2\frac{r^3}{r_0^2}+\frac{r^5}{r_0^4}\right)dr$$

$$= 8\pi U_0^2\rho_2\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{2r_0^2}+\frac{r^6}{6r_0^4}\right]_0^{r_0} = \frac{4}{3}\pi r_0^2\rho_2 U_0^2.$$

La ecuación (2) se escribe pues, poniendo de manifiesto las fuerzas que actúan sobre el motor

$$R_x + (p_1-p_0)A_1 - (p_2-p_0)A_2 = -\rho_1 u_1^2 A_1 + \frac{4}{3}\pi r_0^2\rho_2 U_0^2$$

Para poder despejar R_x falta determinar A_2. Ello se logra a partir de la *ecuación de continuidad,* no empleada hasta ahora. Puesto que el flujo es permanente

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 + 0.02\,\dot{m}_1 = 1.02\,\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 U_0 A_2 = 1.02\times 1.2\times 130\times 0.1$$

$$\dot{m}_2 = 15.9 \text{ kg/seg.}$$

de donde también

$$A_2 = \frac{\dot{m}_2}{\rho_2 U_0} = \frac{15.9}{0.6\times 600} = 3.98\times 10^{-2}\ m^2 = 0{,}0398\ m^2$$

La fuerza de empuje es pues

$$R_x = \frac{4}{3}\,\dot{m}_2 U_0 - \dot{m}_1 u_1 + (p_2-p_0)A_2 - (p_1-p_0)A_1$$

esto es

$$R_x = \frac{4}{3}\ 15.9\times 600 - \frac{15.9}{1.02}\ 130 + 0.2\times 0.0398\times 10^5$$

$$-(-0.1)\times 0.1\times 10^5 = 12700 - 2025 + 796 + 1000$$

$$= 12471\ N = \underline{1247.1\text{ daN}}$$

c. **Empuje con una distribución uniforme de velocidades en el escape.** Se tiene, en este caso,

$$R_x = \dot{m}_2 U_0 - \dot{m}_1 u_1 + (p_2-p_0)A_2 + (p_1-p_0)A_1$$

$$= 9500 - 2025 + 796 + 1000$$

$$= 9271\ N = \underline{927\text{ daN}}$$

6.4 Teorema de transporte (Reynolds)

Con las fórmulas (6.2), (6.5), (6.7) ha quedado desmostrada la relación

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{(V)}\rho\bar{u}\,dV + \int_{(A)}\bar{u}\,\rho\bar{u}\cdot d\bar{A}\,, \qquad (6\text{-}10)$$

donde

$$\overline{P} = \int_{(V)} \rho\, \overline{u}\, dV, \qquad (6\text{-}11)$$

que da la variación de la cantidad $\overline{P}$ asociada al fluido cuando éste se mueve. Como $\rho\overline{u}$ es un vector, aplicando (6–11) se obtiene otro vector $\overline{P}$. Una relación similar entre escalares se obtiene con escribir (6.10) para las componentes sobre $0x$:

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(V)} \rho\, u_x\, dV + \int_{(A)} u_x\, \rho\overline{u} \cdot d\overline{A}, \qquad (6\text{-}12)$$

donde u_x es, en efecto, un escalar, y P_x

$$P_x = \int_{(V)} \rho\, u_x\, dV. \qquad (6\text{-}13)$$

Escrita de esta manera, la propiedad (6.12) puede ser generalizada, obteniéndose el llamado *teorema del transporte de Reynolds:* Sea η una propiedad intensiva escalar cualquiera, asociada al elemento de volumen dV del fluido y sea N la cantidad total correspondiente, esto es

$$N = \int_{(V)} \rho\, \eta\, dV \qquad (6\text{-}14)$$

El teorema del transporte se enuncia entonces, de acuerdo a (6.12)

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = \frac{\partial N}{\partial t} + \int_{(A)} \eta\, \rho\overline{u} \cdot d\overline{A},} \qquad (6\text{-}15)$$

esto es, la tasa de cambio de la magnitud N asociada con una masa dada de fluido en movimiento, es igual a la tasa de cambio de la cantidad N contenida en un instante dado dentro de un volumen de control fijo V, más el flujo en ese instante de dicha cantidad a través de la superficie de control que limita el volumen V.

Este teorema ha sido demostrado en el caso en que η es una cualquiera de las componentes de la velocidad $\overline{u}$, y puede ser utilizado ahora para cualquier magnitud física asociada con un elemento de volumen del fluido, (por ejemplo la densidad, la energía interna, la entropía, etc.), ya sea dicha magnitud un escalar o una componente de un vector.

6.5 Cantidad angular de movimiento

Conviene recordar que dada una partícula material de masa m y velocidad $\overline{u}$, se llama cantidad angular de movimiento de dicha partícula con respecto a un punto fijo 0 a la cantidad $\overline{H} = r \times m\overline{u}$ y para un sistema material discreto

$$\overline{H} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r_i} \times m_i\, \overline{u}_i$$

A partir de la ley de Newton se demuestra entonces, en Mecánica de los sistemas materiales, que se puede escribir*

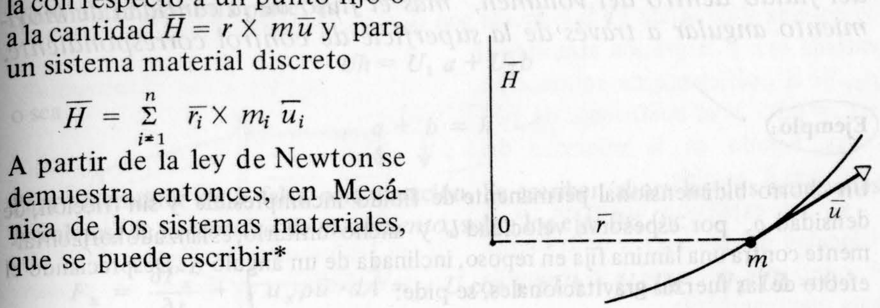


Figura 6.9.

$$\overline{T} = \frac{d\overline{H}}{dt}, \qquad (6\text{-}16)$$

donde $\overline{T}$ es el momento de todas las fuerzas, exteriores al sistema, que actúan sobre él.

Esta propiedad se aplicará ahora al caso de un fluido, que no es otra cosa sino un sistema material continuo. La cantidad angular de movimiento del fluido con respecto a un punto se podrá pues calcular según,

$$\overline{H} = \int_{(V)} \overline{r} \times \rho\overline{u}\, dV, \qquad (6\text{-}17)$$

y aplicando (6.16) se habrá de tener

$$\boxed{\overline{T} = \frac{d\overline{H}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{(V)} \overline{r} \times \rho\overline{u}\, dV.} \qquad (6\text{-}18)$$

Dado que la cantidad $\overline{r} \times \rho\,\overline{u}$ puede ser considerada como ligada al alemento de fluido dV, se puede aplicar aquí el teorema de Reynolds (6.15) a cada componente de $r \times \rho\,\overline{u}$, y finalmente agrupar las tres ecuaciones obtenidas en una sola, a saber

*Ver, por ejemplo, J. León, Mecánica, Limusa.

$$\bar{T} = \frac{\partial H}{\partial t} + \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{u} \; \rho \bar{u} \cdot d\bar{A} \qquad (6\text{-}19)$$

Como anteriormente, esta propiedad tiene una interpretación sencilla, y se puede decir que:

El momento de las fuerzas que actúan sobre un volumen de fluido es igual a la tasa de variación de la cantidad de movimiento angular del fluido dentro del volumen, más el flujo de la cantidad de movimiento angular a través de la superficie de control correspondiente.

Ejemplo:

Un chorro bidimensional permanente de fluido incompresible y sin fricción, de densidad ρ, por espesor h, velocidad U y ancho unitario, es lanzado horizontalmente contra una lámina fija en reposo, inclinada de un ángulo α. Despreciando el efecto de las fuerzas gravitacionales, se pide:

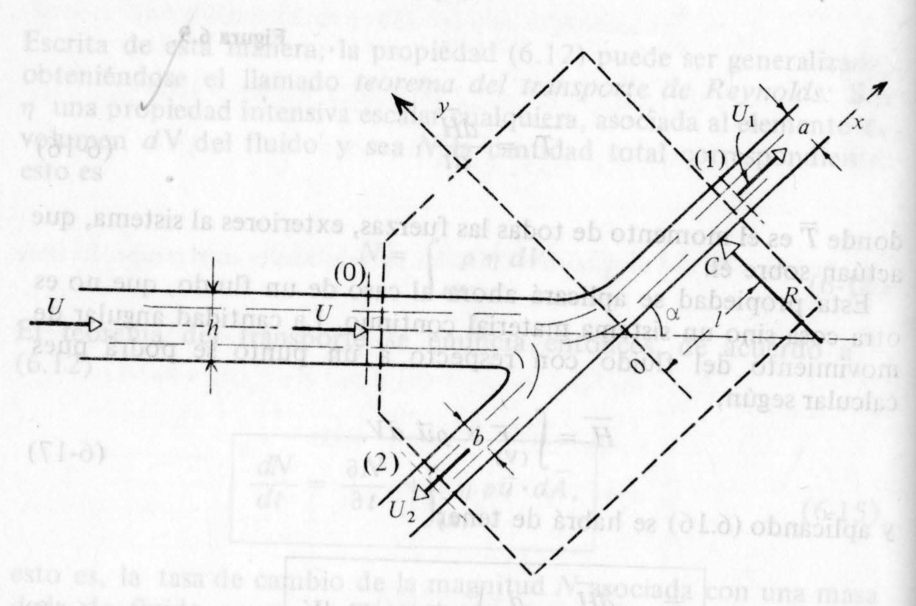


Figura 6.10.

1. Los espesores a y b de las dos ramas en que se divide el chorro, y la fuerza total R que el chorro ejerce sobre la lámina.
2. La posición del punto de aplicación C de R, esto es, del *centro de presión* dinámico.

Solución:

1. De la aplicación del *teorema de Bernoulli* se puede concluir que $U_1 = U_2 = U$. Aplicando este teorema entre 0 y 1 se tiene, en efecto

$$\frac{U^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{U_1{}^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma}$$

ya que se desprecian los efectos de gravedad. Luego $U = U_1$. La ecuación de continuidad, por otra parte, da

$$Uh = U_1\, a + U_2 b$$

o sea

$$a + b = h$$

Para determinar a y b falta otra ecuación. Se escriben ahora las dos ecuaciones (escalares) de la *cantidad de movimiento*, sobre los ejes $0x$, $0y$:

$$F_x = \frac{\partial P_x}{\partial t} + \int u_x \,\rho \bar{u} \cdot d\bar{A} = - U \cos\alpha\, \rho\, Uh + U\rho\, Ua - U\rho\, Ub = 0$$

$$-R = \frac{\partial P_y}{\partial t} + \int u_y \,\rho \bar{u} \cdot d\bar{A} = - U \operatorname{sen}\alpha\, \rho\, Uh$$

De estas ecuaciones se obtiene

$$a - b = h \cos\alpha,$$

$$R = \rho\, U^2 h \operatorname{sen}\alpha.$$

o sea finalmente

$$a = \frac{h}{2}(1 + \cos\alpha), \quad b = \frac{h}{2}(1 - \cos\alpha).$$

$$R = \rho\, U^2 h \operatorname{sen}\alpha.$$

Centro de presión: Se toman momentos en el punto 0, aplicando la ley del momento de la cantidad de movimiento,

$$\bar{T} = \frac{\partial H}{\partial t} + \int_{(A)} \bar{r} \times \bar{u} \; \rho \bar{u} \cdot d\bar{A}$$

y usando de esta ecuación sólo la componente perpendicular al plano de la figura,

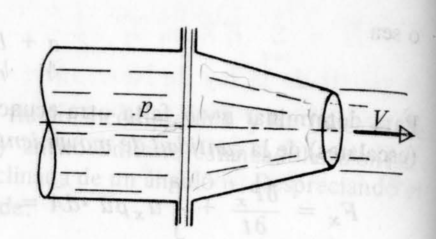
$$lR = \frac{b}{2}\; U\rho\, Ub - \frac{a}{2}\; U\rho\, Ua\,.$$

de donde

$$l = \rho U^2 \frac{b^2 - a^2}{2R} = -\frac{a^2 - b^2}{2h \text{ sen } \alpha}$$

Ejercicios

1. Una boquilla reductora está unida a una manguera de incendio. Los diámetros de entrada y de salida de la boquilla son d_1 y d_2, respectivamente. La presión de entrada es p y la presión atmosférica p_0. Si el coeficiente de contracción es $C_c = 0.95$ y el coeficiente de pérdidas, basado en la velocidad del chorro es K, se pide:



a) La expresión analítica de la velocidad del chorro U y de la fuerza F que debe aplicarse a la boquilla para mantenerla fija.

b) Calcular numéricamente U y F, cuando

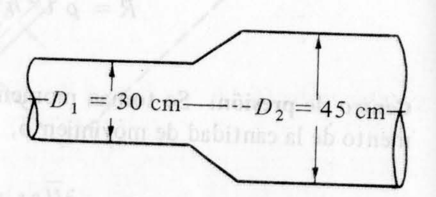
$d_1 = 7.5$ cm, $d_2 = 2$ cm, $p = 10$ bar, $p_a = 1$ bar, $K = 0.05$, $\rho = 1000$ kg/m³.

Respuesta: $U^2 = 2(p - p_0)/\rho\,[1 + K - C_c A_2/A_1]^2$

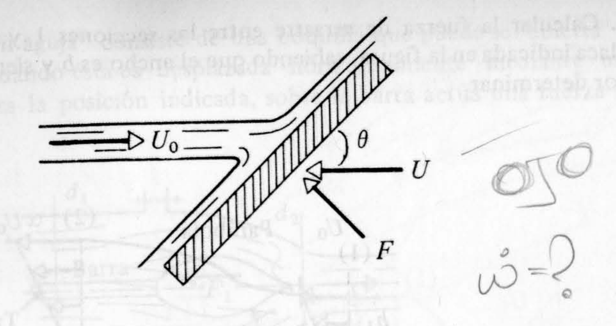
2. En el difusor que se indica circula un caudal de 120 lts/seg de la sección (1) hacia la sección (2), con una pérdida de energía evaluada en

$$0.6 \frac{(U_1 - U_2)^2}{2g}$$

Dado que $p_1 = 0.7$ bar y que el líquido es agua, encontrar p_2. Dibujar las líneas de altura piezométrica y de energía total. Encontrar también la fuerza necesaria para mantener fijo el difusor, e indicar claramente su dirección, suponiendo una distribución parabólica de velocidades en todas las secciones del tubo.



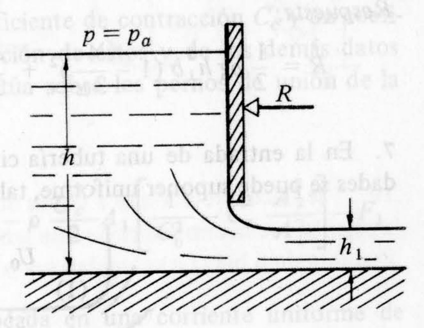
3. Una lámina plana es empujada contra un chorro con una velocidad U, como indica la figura. Determinar la fuerza F que actúa sobre la lámina y la potencia necesaria para moverla.



Respuesta:

$$\dot{W} = -\rho q_0 \frac{(U_0 + U)^2}{U_0} U \text{ sen}^2\theta$$

4. Un líquido incompresible no viscoso de altura h y velocidad U fluye, por acción de la gravedad, por debajo de una compuerta de ancho b, tal como se indica. Determinar la fuerza R necesaria para sostener la compuerta, en función de γ, b, h, h_1

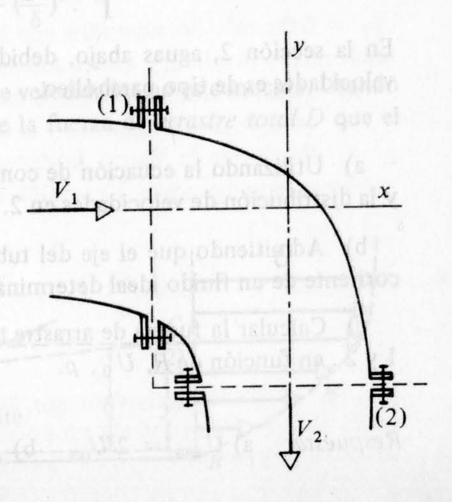


Respuesta: $R = \dfrac{\gamma b (h - h_1)^3}{2(h + h_1)}$

5. Por un codo de 90° divergente y colocado horizontalmente, fluye petróleo de peso específico relativo 0.84, desde una tubería de 45 cm a una de 60 cm de diámetro. Si la pérdida de energía se puede expresar por

$$0.7 \frac{U_1^2}{2g},$$

se piden las componentes de la fuerza de anclaje necesaria para sotener el codo, cuando el caudal es de 1500 lts/seg y la presión de entrada 1.3 bar.

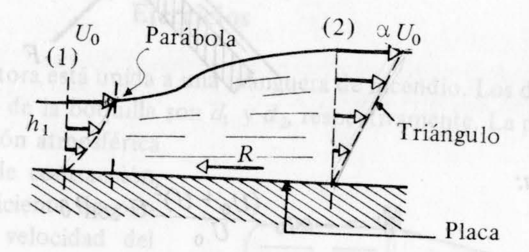


Respuesta:

$R_x = 34815$ N,

$R_y = 44457$ N.

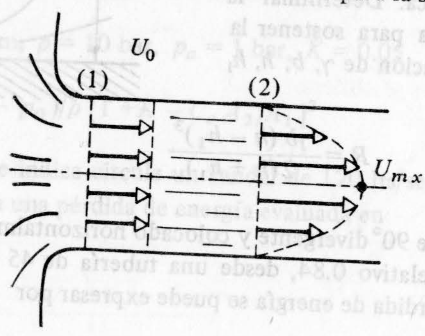
6. Calcular la fuerza de arrastre entre las secciones 1 y 2, que actúa sobre la placa indicada en la figura, sabiendo que el ancho es b y siendo α un coeficiente por determinar.



Respuesta:

$$R = \frac{1}{2}\rho g h_1^2 b \left(1 - \frac{4}{3\alpha}\right)^2 + \frac{4}{3}\rho U_0^2 h b \left(\frac{2}{5} - \frac{\alpha}{3}\right)$$

7. En la entrada de una tubería circular de radio R, la distribución de velocidades se puede suponer uniforme, tal como se indica para la sección (1).



En la sección 2, aguas abajo, debido a los efectos viscosos, la distribución de velocidades es de tipo parabólico.

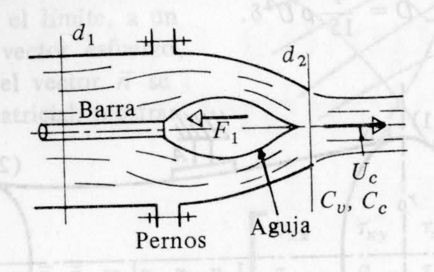
a) Utilizando la ecuación de continuidad, calcular la velocidad máxima U_{mx} y la distribución de velocidades en 2.

b) Admitiendo que el eje del tubo puede ser considerado como una línea de corriente de un fluido ideal determinar la caída de presión $p_1 - p_2$.

c) Calcular la fuerza de arrastre total que actúa sobre la pared del tubo entre 1 y 2, en función de R, U_0, ρ.

Respuesta: a) $U_{mx} = 2\,U_0$, b) $p_1 - p_2 = \frac{3}{2}\rho U_0^2$, c) $D = \frac{7}{6}\rho\pi R^2 U_0^2$.

8. Una boquilla "con aguja" consiste de una boquilla que puede ser abierta o cerrada por la aguja cuando ésta es desplazada horizontalmente mediante una barra de control. Para la posición indicada, sobre la barra actúa una fuerza de



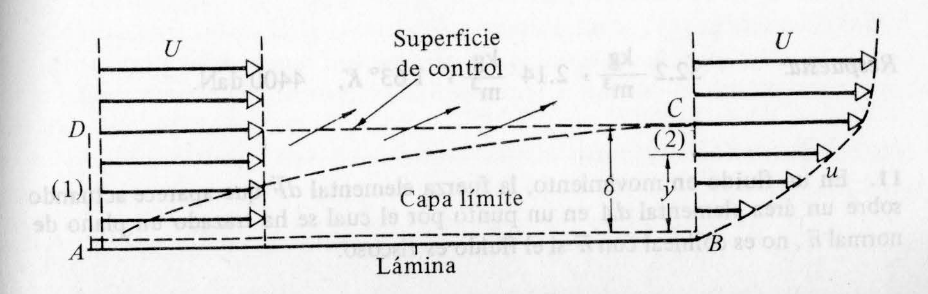
tensión F_1 dada. Si el chorro tiene un coeficiente de contracción C_c y un coeficiente de velocidad C_v, encontrar en función de éstos y de los demás datos indicados en la figura, la fuerza F que actúa sobre los pernos de unión de la boquilla al tubo de alimentación.

Respuesta: $F = \rho U_c^2 C_c A_2 \left[1 - C_c \frac{A_2}{A_1}\right] - \rho \frac{U_c^2}{2} A_1 \left[\frac{1}{C_v^2} - C_c^2 \frac{A_2^2}{A_1^2}\right] - F_1$

9. Sobre cada cara de una lámina colocada en una corriente uniforme de líquido, se forma una capa límite que puede ser esquematizada como indica el dibujo adjunto: En el borde aguas arriba (1) de la lámina, la distribución de velocidades es uniforme; en el borde aguas abajo (2), la velocidad en la capa límite, de espesor δ, es dada por la ley parabólica

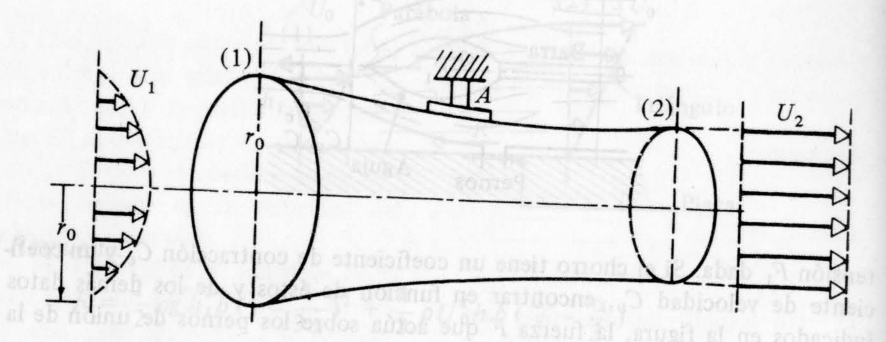
$$\frac{u}{U} = 2\,\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2.$$

Entre los bordes (1) y (2) la distribución de velocidades no es conocida. Usando la superficie de control indicada, determine la fuerza de *arrastre total D* que el líquido ejerce sobre la lámina.



En el planteo del problema se supondrá que la presión es la misma en todo punto del fluido y que la componente horizontal de la velocidad del fluido que atraviesa la cara CD es U.

Respuesta: $D = \frac{4}{15} \rho U^2 \delta.$



10. Se hace circular aire a través del ducto que se muestra bajo las condiciones siguientes: A la entrada tiene una temperatura uniforme de 280°C y una presión absoluta de 6 bar. La velocidad no es uniforme sino que varía según la ley

$$U_1 = 170\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

y el área de entrada es $A_1 = 0.1 \text{ m}^2$. A la salida, la presión es de 1 bar en el chorro, la distribución de velocidades es uniforme, con $U_2 = 300 \ \frac{\text{m}}{\text{seg}}$ y $A_2 = 0.05 \text{ m}^2$. Se supondrá que la temperatura, la presión y la densidad son uniformes a la salida, y que el aire es un gas ideal. Se pregunta:

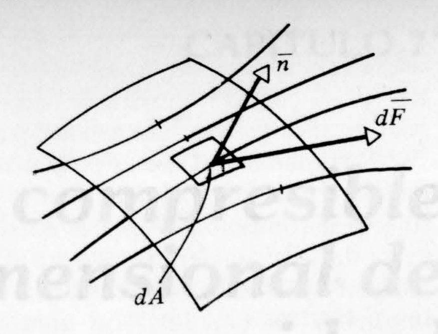
a) ¿Cuál es el caudal en masa que atraviesa el ducto?
b) ¿Cuales son la densidad y la temperatura de salida?
c) Encontrar la fuerza horizontal *que actúa sobre el soporte A* e indicar claramente su dirección. La presión circundante es de 1 bar.

Respuesta: $32.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $2.14 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $1.63° \, K$, 4400 daN.

11. En un fluido en movimiento, la fuerza elemental $d\overline{F}$ que aparece actuando sobre un área elemental dA en un punto por el cual se ha trazado un plano de normal $\overline{n}$, no es colineal con $\overline{n}$ si el fluido es viscoso.

El cociente

$$\frac{d\overline{F}}{dA}$$



define entonces, en el límite, a un vector $\overline{\sigma}_n$, llamado vector esfuerzo, colineal con $d\overline{F}$. Si el vector $\overline{n}$ se escribe en forma matricial, mostrar que se tiene

$$\overline{\sigma}_n = \overline{n} \cdot \overline{\overline{\sigma}} = [n_x \; n_y \; n_z] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

CAPITULO 7*

Flujo compresible undimensional de un gas ideal

7.1 Introducción

EN ESTE capítulo se presentará una introducción al estudio del flujo de un fluido compresible. La particularidad fundamental de este flujo flujo es la variación de la densidad.

Las ecuaciones Euler y la de continuidad (cuatro en total) ya no son suficientes para describir el movimiento. En efecto hay ahora mayor número de incógnitas que de ecuaciones, a saber: u_x, u_y, u_z, p, ρ. Con referencia a las ecuaciones (3.12) y (4.7), se observa que hace falta hacer intervenir una relación adicional característica del fluido considerado, que ligue presión y densidad: habrá de ser la ecuación de estado de la sustancia, ya considerada en (1.20).

La introducción de la ecuación de estado, si bien proporciona una *ecuación adicional*, introduce también una *nueva variable*, a saber la temperatura θ. Por esta razón será además necesario precisar, en cada problema, qué tipo de proceso se verifica durante el flujo: isotermo, adiabático, etc. Esta *condición* completará el problema general, proporcionando igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Del análisis anterior se desprenden varias observaciones, que pueden resumirse así:

1. El estudio del flujo compresible implica necesariamente la consideración de la temperatura del fluido y de sus variaciones. Es decir que son inevitables los *conceptos de termodinámica*.

2. Es evidente que de todos los fluidos compresibles, el que tenga la *ecuación de estado* más sencilla será el de más fácil estudio. Es pues lógico empezar con el llamado gas perfecto cuyas propiedades ya han sido señaladas, (1.30).

Afortunadamente, esas propiedades se verifican también en los gases reales, como una primera y muy buena aproximación cuando están sujetos a condiciones lejanas de su punto crítico . En particular, los gases de la atmósfera tienen un comportamiento muy parecido al de los gases perfectos. Conviene sin embargo completar las propiedades implícitas en (1.30), con el objeto de obtener un *modelo* muy cercano a la realidad y al mismo tiempo de estudio lo más sencillo posible: este modelo se llamará *gas ideal*.

El plan del capítulo será, por tanto, presentar un breve recuento de las definiciones y leyes de la Termodinámica, el cual puede ser omitido por el lector enterado, y posteriormente, estudiar, en el caso *unidimensional*, las leyes que rigen el flujo de un *gas ideal*.

7.2 Recuento de Termodinámica.

Se entiende por *sistema termodinámico cerrado* una cantidad de materia, limitada en su extensión, y sometida eventualmente a intercambios de energía con el resto del universo.

Se puede decir entonces que la termodinámica estudia el conjunto de leyes de tipo macroscópico que permiten prever la evolución de un sistema termodinámico dado, cuando está sujeto a intercambios de energía con otros sistemas.

Es de anotar que las leyes de la termodinámica se pueden extender también a los *sistemas abiertos*, es decir a sistemas sujetos a un flujo de masa a través de sus fronteras. En esta introducción no se considerarán tales sistemas. Finalmente, un *sistema aislado* será un sistema que no sufra ningún intercambio con el exterior.

La materia que constituye un sistema puede ser cualquiera. Aquí se considerará en particular el caso de los gases, aunque las leyes fundamentales serán enunciadas en términos generales.

7.2.1 Definiciones

Otras definiciones se hacen necesarias, que se pueden resumir como sigue.

Se dice que un sistema *está en equilibrio termodinámico* cuando a través del tiempo no sufre cambio observable macroscópicamente. Para un sistema en equilibrio se pueden definir ciertas características macroscópicas o coordenadas, como por ejemplo, en el caso de un gas, su temperatura θ, su volumen V y su presión p. Se habla entonces también de su *estado* el cual queda caracterizado por las *coordenadas* que lo definen; como θ, p y V en el ejemplo de los gases.

Así, el concepto de estado de un sistema significa que éste está en equilibrio y que sus características macroscópicas están bien determinadas. Además cualquier otra función que pueda definirse sobre las propiedades del sistema en ese estado, estará bien determinada en función de las coordenadas, θ, V, p por ejemplo.

Más adelante se introducirán en efecto, nuevas funciones del estado de un sistema, por ejemplo la energía interna E, la entropía S o la entalpía H. Lo que quiere decir "función de estado", es que E por ejemplo, es función de punto, esto es

$$E = E\ (\theta, p, V),$$

y que por consiguiente está totalmente definido su valor para un *estado* dado del sistema.

Cuando el sistema está sometido desde el exterior a influencias diversas, su estado de equilibrio se modifica y el sistema evoluciona. Se llama *proceso o transformación termodinámicos* a esa evolución la cual habrá de continuar hasta un estado final de equilibrio, al término del proceso.

Aquí se hace imprescindible considerar cómo se efectúan los procesos en la naturaleza y cómo han sido idealizados por la ciencia. Si un sistema es sometido a influencias exteriores: trabajo o calor transmitidos (por ejemplo), estas influencias en general hacen evolucionar el sistema hasta un estado final mediante el paso por situaciones intermedias que posiblemente no son definibles termodinamicamente. Es el caso, por ejemplo, del calentamiento de un litro de agua mediante una llama desde 0°C a 100°C. Durante este proceso el líquido no tiene en todas partes la misma temperatura, hay movimientos de convección, etc., que hacen imposible *definir*, la temperatura *del sistema* en las situaciones intermedias.

Para idealizar un proceso como el anterior se ha introducido el concepto de proceso *cuasi–estático,* el cual se considera como una *sucesión de estados de equilibrio,* siendo posible definir entonces el estado del sistema a cada paso.

La pregunta de saber cuánto se aparta un proceso real de un proceso cuasi-estático correspondiente, será objeto de estudio más adelante.

Por otra parte, si un proceso es tal que despues de varias transformaciones se lleva la sustancia al *mismo estado* de partida, se dice que se ha efectuado un proceso cíclico.

Un proceso cuasi-estático puede ser representado en un diagrama p, V indicándose como una línea continua esa sucesión

de estados de equilibrio cada uno de los cuales es representado por un punto de la curva.

En esta representación, un *proceso cíclico* viene indicado por una curva cerrada, siendo A por ejemplo, el punto de partida y de llegada.

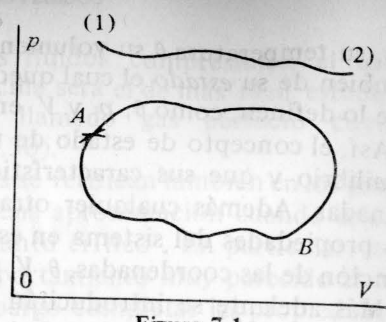


Figura 7.1.

Como se ha dicho, la termodinámica trata de intercambios de energía. Esos intercambios se representan macroscopicamente en dos aspectos distintos: trabajo y transferencia de calor.

La definición de trabajo adoptada en mecánica

$$W = \quad \bar{F} \cdot d\bar{r}\,, \qquad (7\text{-}1)$$

toma forma distinta cuando se la aplica a los gases.

En efecto, considérese un gas encerrado en un recinto cuyas paredes pueden desplazarse.

El trabajo elemental se podrá expresar mediante

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{r} = p\bar{n} \cdot dA\, d\bar{r} = p\,dV$$

o sea que

$$W_{1,2} = \int_1^2 p\,dV \qquad (7.2)$$

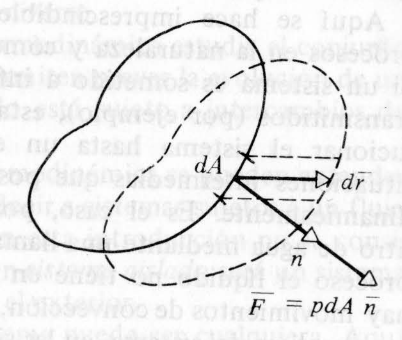
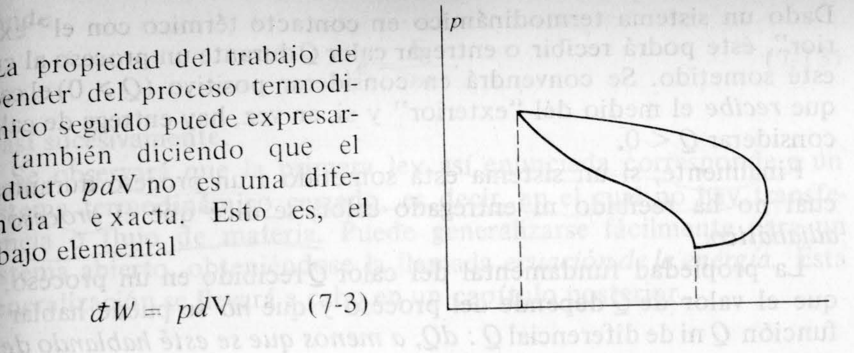


Figura 7.2.

Es de observar que el trabajo total es una integral curvilínea, y que por consiguiente *depende* de la trayectoria de integración. Asimismo la expresión (7.2) dependerá de cómo varía p con el volumen, es decir que el trabajo entre un estado, (1) y un estado (2) depende del proceso termodinámico seguido para ir de un estado a otro.

Si se representa el proceso (cuasi-estático) en un diagrama p, V, el trabajo $W_{1,2}$ depende de la curva seguida entre los puntos inicial y final. Esto queda más claro todavía si se observa que (7.2) no es otra cosa sino el área bajo la curva $p = p(V)$.



La propiedad del trabajo de depender del proceso termodinámico seguido puede expresarse también diciendo que el producto $p\,dV$ no es una diferencial exacta. Esto es, el trabajo elemental

$$\bar{d}W = p\,dV \qquad (7\text{-}3)$$

no representa la diferencial de ninguna *función de punto W*. Para recordar esto, se puede indicar con el símbolo $\bar{d}\,W$.

En cuanto a unidades de trabajo, en el sistema *MKS* (*SI*), se tendrá

$$[W] = N\,m = J. \qquad \text{(Joule)}. \qquad (7\text{-}4)$$

y el trabajo por unidad de tiempo

$$P = \dot{W} = \frac{dW}{dt}\,, \qquad (7\text{-}5)$$

o *potencia*, será

$$[P] = [\dot{W}] = J\ \text{seg}^{-1} = w,\ \text{(watt)} \qquad (7\text{-}6)$$

El último concepto importante que cabe mencionar es el de *calor*. Modernamente se concibe el calor como intercambio de energía que no puede ser expresado por un *trabajo* macroscópico como el definido más arriba. Se trata de un intercambio de energías cinéticas entre las moléculas de dos cuerpos o sustancias puestas en contacto y que tienen originalmente temperaturas distintas. Al tener temperaturas desiguales, las moléculas del cuerpo a mayor temperatura tienen mayor *energía cinética* y se la transmiten por interacción (choques, etc.) a las moléculas del otro cuerpo. *Macroscópicamente* decimos que ha habido entonces un *flujo de calor Q* del cuerpo más caliente al más frío.

Las unidades de calor son las mismas que las de energía cinética, por lo antes dicho, esto es

$$[Q] = [W] = J \qquad \text{(Joule)} \qquad (7\text{-}7)$$

Por razones históricas se utiliza a veces también la caloría, definida según

$$1\ \text{cal} = 4.182\ \text{J}, \qquad (7\text{-}8)$$

Dado un sistema termodinámico en contacto térmico con el "exterior", éste podrá recibir o entregar calor Q durante un proceso al cual esté sometido. Se convendrá en considerar positivo ($Q > 0$) el calor que *recibe* el medio del "exterior" y si, en vez, hay entrega de calor, considerar $Q < 0$.

Finalmente, si un sistema está sometido a un proceso durante el cual no ha recibido ni entregado calor, se dice que el *proceso es adiabático*.

La propiedad fundamental del calor Q recibido en un proceso, es que el valor de Q depende del proceso y que *no* se puede hablar de función Q ni de diferencial Q : dQ, *a menos que se esté hablando de un proceso particular bien definido.*

En general se indicará pues un *pequeño* intercambio de calor por

$$đQ$$

y para *un proceso dado,* se tendrá

$$Q_{1,2} = \int_1^2 đQ. \tag{7-9}$$

7.2.2 Primera ley de la termodinámica

Esta primera ley no es otra cosa sino el enunciado del principio de la conservación de la energía:

Si $W_{1,2}$ es el trabajo realizado por un sistema termodinámico cerrado durante un proceso y $Q_{1,2}$ el calor que ha recibido, se tiene

$$Q_{1,2} - W_{1,2} = E_2 - E_1 \tag{7-10}$$

donde E es una función de estado del sistema, llamada *energía interna*.

Esta energía interna representa físicamente, la suma de todas las energías cinéticas de traslación, vibración, etc., y de las energías potenciales de las moléculas que constituyen el sistema.

La *forma diferencial* de la primera ley es

$$dE = đQ - đW \tag{7-11}$$

donde dE es, efectivamente, una diferencial exacta.

También se puede expresar la primera ley en términos de la unidad de masa de la sustancia. Si m es la masa total,

$$de = đq - đw \tag{7-12}$$

donde

$$e = \frac{E}{m}, \tag{7-13}$$

y así sucesivamente.

Se observará que la primera ley así enunciada corresponde a un sistema termodinámico cerrado, es decir, en el cual no hay transferencia o flujo de materia. Puede generalizarse fácilmente para un sistema abierto, obteniéndose la llamada *ecuación de la energía.* Esta generalización se llevará a cabo en un capítulo posterior.

7.2.3 Procesos reversibles

Ya se planteó anteriormente la pregunta de cómo conceptuar los procesos naturales, esto es, los que se producen en la naturaleza o en las máquinas inventadas por el hombre.

Para llenar ese propósito se habló de los procesos cuasi-estáticos como de una sucesión de estados de equilibrio. Un eslabón adicional consiste en definir un *proceso reversible.*

Se llama así en un proceso cuasi-estático durante el cual, además, no se producen *efectos disipativos* de ninguna clase.

Estos efectos disipativos ocurren en todo fenómeno natural y son de origen muy variado. Tienen todos sin embargo el resultado de transformar *trabajo mecánico* en *calor*, con aumento correspondiente de la energía interna del sistema.

En el caso que nos ocupa de los fluidos, el ejemplo más patente de efecto disipativo lo constituye la *viscosidad.* En efecto, como ya se vió en (1.19), la viscosidad contribuye en transformar la energía mecánica que el fluido puede tener en energía interna, en forma de calor.

Con el objeto de lograr *procesos reversibles* en este primer estudio del movimiento de un gas, será necesario pues la hipótesis de viscosidad nula que se incluirá en la definición de gas ideal.

Todavía queda por responder la pregunta inicial de cómo conceptuar los procesos naturales. Por lo dicho y por otros ejemplos que se pueden dar, es claro que los *procesos naturales son irreversibles*. Una medida de esa irreversibilidad la da la segunda ley de la termodinámica.

7.2.4 La segunda ley de la termodinámica

La segunda ley de la termodinámica puede ser enunciada de varias maneras, de acuerdo con la naturaleza de los sistemas a estudiar. Aquí se la enunciará en base al concepto de entropía.

Se llama *entropía* una nueva función de estado definida como

$$dS = \frac{\bar{d}Q}{\theta} \tag{7-14}$$

esto es, entre dos estados (1) y (2):

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\bar{d}Q}{\theta} \tag{7-15}$$

Es de observar que el factor $\frac{1}{\theta}$ actúa como un factor integrante, que convierte dQ en una diferencial exacta.

Físicamente, el concepto de entropía es una medida de la probabilidad asociada con una distribución dada de la energía, entre las distintas moléculas y átomos que constituyen el sistema. Del punto de vista macroscópico, el cambio de entropía del universo, ligado a un cierto proceso, será una medida del grado de irreversibilidad de dicho proceso.

En este último sentido es que conviene precisar el significado de la definición (7.15). Para ello se enunciará la *segunda ley de la termodinámica* como sigue:

En todo proceso, el cambio de entropía de un sistema aislado es positivo,

$$\Delta S \geqslant 0, \tag{7-16}$$

el caso de la igualdad verificándose solamente si el proceso es reversible.[1]

7.2.5 Calores específicos

Se llama calor específico de una sustancia a la cantidad de calor necesaria para elevar de un grado la temperatura de 1Kg. de esa sustancia. Como el calor recibido dQ depende del *proceso* seguido, es necesario precisarlo. De esta manera se tiene:

Calor específico a presión constante:

$$c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{\bar{d}Q}{d\theta}\right)_p. \tag{7-17}$$

Calor específico a volumen constante:

$$c_v = \frac{1}{m}\left(\frac{\bar{d}Q}{d\theta}\right)_v. \tag{7-18}$$

[1] Ver también: E. Fermi, Termodinámica, Eudeba.

También se define la razón entre estas dos cantidades

$$\frac{c_p}{c_v} = k \tag{7-19}$$

Si el calor específico es constante para una sustancia dada, dentro de ciertos límites, se tiene

$$Q = m\,c\,(\theta_2 - \theta_1). \tag{7-20}$$

7.2.6 Primeras consecuencias de las leyes primera y segunda

Las consecuencias de estas leyes son muy numerosas. Aquí se recuerdan algunas que habrán de ser útiles en lo que sigue. Partiendo de (7.11) y recordando (7.3) y (7.15).

$$\begin{aligned} dE &= \bar{d}Q - \bar{d}W \\ &= \theta\,dS - p\,dV \end{aligned} \tag{7-21}$$

Resulta cómodo a veces introducir una nueva función de estado llamada *entalpía* y definida por

$$H = E + pV \tag{7-22}$$

Entonces, la ecuación (7.21) se puede escribir

$$\bar{d}Q = \theta\,dS = dE + p\,dV = dH - V\,dp \tag{7-23}$$

7.2.7 Relaciones termodinámicas para los gases ideales

Es ahora oportuno para decir qué se entenderá por un *gas ideal*, de manera a obtener un *modelo* a las vez preciso y cómodo con que estudiar el movimiento de un fluido compresible.

Un *gas ideal* será un gas con las siguientes propiedades:

1. Cumple con la relación de los *gases perfectos* (1.30).

$$\frac{p}{\rho} = R\theta \tag{7-24}$$

2. Su *energía interna* E es únicamente función de la temperatura absoluta θ.

$$E = E(\theta). \tag{7-25}$$

Esta propiedad es sugerida por el comportamiento de los gases reales a baja presión (efecto Joule), y es consecuencia del modelo estadístico clásico de un gas ideal.

3. Un gas ideal estará *desprovisto* de *viscosidad* μ y de *conductividad térmica* k.

Estas suposiciones son naturalmente falsas para un gas real, pero μ es generalmente muy pequeña. Suponer $\mu = 0$ cuadra con el método general de la mecánica de los fluidos que consiste en considerar primero fluídos no viscosos, tal como se ha hecho en capítulos anteriores. En cuanto a la conductividad, los gases también son generalmente poco conductores.

4. Los *Calores específicos* del gas son constantes.

Veamos cuales son las consecuencias más importantes de estas suposiciones.

a) *Calores específicos*

De la primera ley

$$dE = đQ - p dV$$

recordando (7.13), (7.18) y (7.25),

$$c_v = \frac{1}{m}\left(\frac{đQ}{d\theta}\right)_V = \frac{1}{m}\frac{dE}{d\theta} = \frac{de}{d\theta}, \qquad (7\text{-}26)$$

Asimismo, a partir de (7.23) y (7.17)

$$c_p = \frac{1}{m}\left(\frac{đQ}{d\theta}\right)_p = \frac{1}{m}\frac{dH}{d\theta} = \frac{dh}{d\theta}, \qquad (7\text{-}27)$$

ya que también para un gas ideal es fácil demostrar que la entalpía es función unicamente de la temperatura

$$h = e + pv = e(\theta) + R\theta \qquad (7\text{-}28)$$

Los dos calores específicos relacionados entre sí.

$$c_p = \frac{d(e + R\theta)}{d\theta} = c_v + R \qquad (7\text{-}29)$$

Recordando (7.19) se puede despejar c_p y c_v:

$$c_p = \frac{k}{k-1} R, \qquad (7\text{-}30)$$

$$c_v = \frac{R}{k-1} \qquad (7\text{-}31)$$

b) *Proceso diabático de un gas ideal.* Se puede demostrar fácilmente ahora la relación (1.32) que caracteriza un proceso en el cual no

hay intercambio de calor entre el sistema y el exterior. En la primera ley, tomando en cuenta (7.26),

$$đQ = dE + p dV = m c_v \, d\theta + p dV, \qquad (7\text{-}32)$$

y de (7.23), usando (7.27)

$$đQ = dH - V dp = m c_p \, d\theta - V dp. \qquad (7\text{-}33)$$

Para un *proceso diabático* $đQ = 0$, de donde

$$k = \frac{c_p}{c_v} = -\frac{V dp}{p dV}$$

de donde,

o también

$$\frac{dp}{p} = k \frac{dV}{V} = k \frac{dv}{v}$$

e integrando

$$pv^k = \text{const.} \qquad (7\text{-}35)$$

o también

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{const.} \qquad (7\text{-}36)$$

c) *Proceso isoentrópico de un gas ideal.*

Rercordando la definición de entropía (7.14).

$$dS = \frac{đQ}{\theta}, \qquad (7\text{-}37)$$

Se ve que un proceso en el cual un elemento de la sustancia, (en nuestro caso será un fluido), no recibe calor ($đQ = 0$) se produce entropía constante, ya que $dS = 0$.

Ahora bien, en un *gas ideal* sometido a un proceso adiabático no hay recepción de calor del exterior. Por otra parte, siendo la viscosidad nula, no hay producción de calor a partir de trabajo mecánico. Finalmente, si hay variaciones de temperatura debido al proceso mismo, tampoco se transmiten puesto que la conductividad es nula. Luego el proceso es *isoentrópico* esto es, de entropía constante.

La gran ventaja de las idealizaciones hechas consiste en haber logrado este resultado, que será ampliamente utilizado en lo que sigue.

Ejercicios

1. Demostrar que el trabajo efectuado por un gas ideal durante un proceso isotermo es

$$W_\theta = mR\theta \ln \frac{V_2}{V_1} = mR\theta \ln \frac{p_1}{p_2}$$

donde V_1 y V_2 son los volúmenes inicial y final. ¿Qué cantidad de calor es absorbido durante este proceso?

2. Demostrar que en un proceso adiabático la presión y la temperatura varían según la ley

$$\theta p^{-\frac{k-1}{k}} = \text{const.}$$

y que asimismo

$$\frac{\theta}{\rho^{k-1}} = \text{const.}$$

3. Demostrar que la pendiente de la curva representativa de una transformación adiabática, en un diagrama p-V es mayor en un punto cualquiera que la de una curva representativa de una transformación isoterma que pasa por el mismo punto.

4. Evaluar el trabajo realizado por un gas ideal sometido a un proceso adiabático entre los puntos correspondientes a las condiciones p_1, V_1, θ_1 y p_2, V_2, θ_2, con $V_2 > V_1$

Respuesta: $W = \dfrac{mR(\theta_1 - \theta_2)}{k-1} = \dfrac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{k-1}$

5. Un gas ideal a 300°K ocupa un volumen de 0.5 m^3 a una presión de 2 atm. El gas se dilata adiabáticamente hasta que su volumen sea de 1.2 m^3. Posteriormente, el gas es comprimido a presión constante hasta su volumen inicial. Finalmente se le comprime a volumen constante hasta alcanzar la situación original.

a) Representar el proceso cíclico descrito en un diagrama.

b) Determinar la temperatura al final de cada transformación.

c) Encontrar el trabajo efectuado durante el ciclo

Se tomará $k = 1.4$

Respuesta: $\theta_2 = 211$°K, $\theta_3 = 87$°K, $W = 34$ KJ

6. Mostrar que el cambio de entropía de una sustancia calentada reversiblemente a presión constante y suponiendo que el calor específico es constante, es dado por

$$\Delta S = m c_p \ln \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

7. Calcular la entropía y la entalpía de un gas perfecto suponiendo c_p y c_v constantes.

Respuesta: $s - s_o = c_p \ln \dfrac{\theta}{\theta_0} - R \ln \dfrac{p}{p_0} = c_v \ln \dfrac{p}{p_0}\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^k; \; h = h_0 + c_p(\theta - \theta_0).$

8. En problemas de balística exterior se utiliza, para un gas, la ecuación de estado de Abel,

$$\left(\frac{1}{\rho} - b\right) p = R\theta,$$

donde b es el llamado covolumen. Suponiendo que los calores específicos son constantes, calcúlese:

a) La entalpía h y la entropía s.

b) El trabajo en un proceso isotermo y en uno adiabático.

Respuesta:

a) $$s - s_0 = c_p \ln \frac{\frac{1}{\rho} - b}{\frac{1}{\rho_0} - b} + c_v \ln \frac{p}{p_0}$$

$$h - h_0 = c_p\,\theta + b\,p$$

b) $$w_{1,2} = R\,\theta \ln \frac{p_2}{p_1}$$

$$w_{1,2} = c_v\,(\theta_2 - \theta_1)$$

9. Mostrar que para un fluído incompresible, (líquido, en forma aproximada), la energía interna es dada por

$$u = c_v\,\theta,$$

donde c_v es el calor específico, (a volumen constante, necesariamente), supuesto constante.

7.3 Velocidad de propagación del sonido

Como es sabido, la propagación del sonido es un fenómeno mecánico mediante el cual una *ligera* perturbación de la presión se propaga en

el seno de un medio deformable. En el caso de un gas en particular, la velocidad de propagación del sonido tiene una importancia considerable cuando éste, a su vez, se mueve. En efecto, el comportamiento del gas es totalmente distinto según sea su velocidad mayor o menor que dicha velocidad de propagación.

Ahora bien, cuando un gas se mueve, arrastra consigo cualquier onda de presión que pueda estar produciéndose y propagándose en su seno. De donde aparece la necesidad de estudiar con cierto detenimiento el fenómeno combinado del movimiento del fluido y de la propagación del sonido en su seno.

Para ello considérese un gas que fluye por un tubo con una velocidad constante U, una presión p y una densidad ρ.

Si en un momento dado se produce una perturbación en la velocidad del flujo, en una cierta sección, esta perturbación se propaga con una velocidad absoluta U', que se quiere evaluar. La velocidad relativa de la perturbación con respecto al fluido, se llama *velocidad del sonido* para esas condiciones de escurrimiento, y se escribe

$$c = |U' - U| \qquad (7\text{-}38)$$

En los esquemas adjuntos, el (1) representa las condiciones reales mediante las cuales se puede producir la perturbación en el gas.

Figura 7.4.

La figura (2) indica las condiciones antes y después que el frente de la onda de presión ha pasado por una sección determinada. El frente de onda se desplaza con una velocidad U'.

En la figura (3) indica la misma onda y las condiciones prevalecientes tales como las vería un observador que se moviera con la propia onda de sonido. Con respecto a él, la onda de presión está inmóvil y todo ocurre como si el fluido se desplazase hacia la izquierda con una velocidad $U' - U$. Se trata pues de un flujo permanente.

Aplicando el teorema de Bernoulli (4.30) entre las secciones (a) y (b) se puede escribir

$$\frac{[U' - (U + dU)]^2}{2} + \frac{p + dp}{\rho} = \frac{(U' - U)^2}{2} + \frac{p}{\rho}$$

Por consiguiente, desarrollando, simplificando y despreciando los términos de orden superior, se obtiene

$$(U' - U)\, dU = \frac{dp}{\rho}\ [1] \qquad (7\text{-}39)$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad, aplicada al volumen de control indicado, permite escribir que

$$(U' - U)\, A\rho = (U' - U - dU)A\,(\rho + d\rho).$$

de donde, después de simplificar

$$dU = (U' - U)\,\frac{d\rho}{\rho} \qquad (7\text{-}40)$$

Combinando las relaciones (7.36) y (7.40) obtenemos, sucesivamente

$$(U' - U)^2 = \frac{dp}{d\rho} \Rightarrow U' - U = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \qquad (7\text{-}41)$$

Es decir que la *velocidad del sonido*, relativa al fluído en movimiento es dada por

$$\boxed{U' - U = \pm c = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}} \qquad (7\text{-}42)$$

De esta manera, la velocidad *absoluta* del frente de la onda de sonido es

$$U' = U \pm c, \qquad (7\text{-}43)$$

es decir, como se apuntó inicialmente, que la onda es "arrastrada" por el fluido. Su velocidad es pues mayor en la dirección del flujo y menor cuando se desplaza en su contra.

Estas observaciones permiten comprender la distinción entre *flujo subsónico* y *flujo supersónico*.

Consideremos una fuente puntual que emite ondas de presión en todas las direcciones. Si el fluído está inmóvil, estas ondas son esféricas.

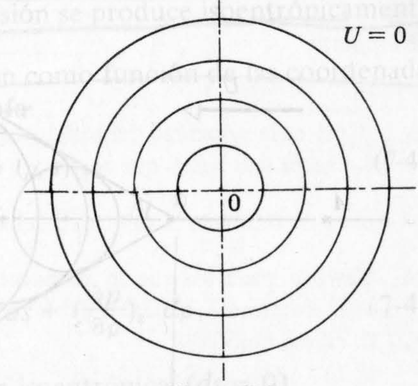


Figura 7.5.

[1] La variación de densidad ρ no interviene en (7.39), sino como un infinitésimo de segundo orden.

Si la fuente sonora se encuentra en el seno de un fluido que está moviéndose con una velocidad $U < c$, (esto es $\frac{U}{c} < 1$, flujo subsónico), aparece una disimetría en las ondas sonoras, ya que éstas son arrastradas por el fluido.

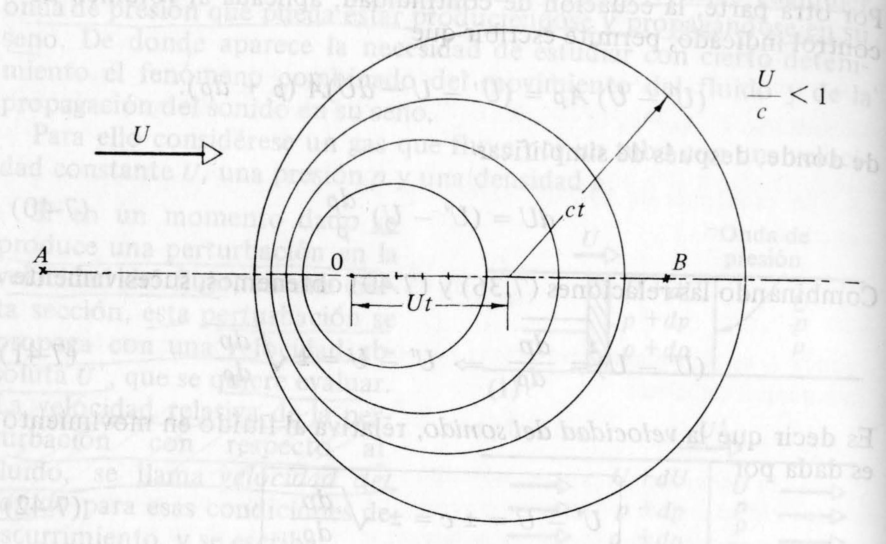


Figura 7.6.

Visto en plano, las superficies de onda presentan la disposición disimétrica indicada. Las esferas de onda son "barridas" aguas bajo. Un punto A recibe el sonido emitido por 0, pero mucho más tarde que el punto B colocado a la misma distancia.

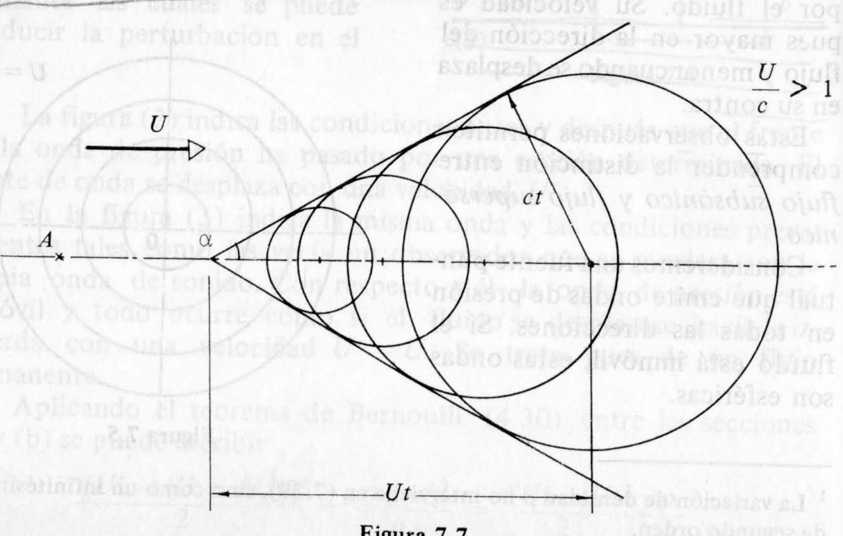


Figura 7.7.

Si la velocidad del flujo $U > c$, (esto es $\frac{U}{c} > 1$, flujo supersónico), la situación cambia radicalmente ya que las ondas sonoras son barridas totalmente aguas abajo. El sonido nunca llega a un punto tal como A. En cambio los frentes de onda admiten como envolvente una superficie cónica, en la cual el cambio de presión *no es ya una ligera perturbación* sino un brusco salto de magnitud finita. Se dice entonces que se ha creado una *onda de choque* que, en el caso de una fuente puntual, toma la forma de un cono.

Este cono llamado *cono de Mach,* tiene un ángulo en el vertice dado por

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{c}{U} \tag{7-44}$$

esto es

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{M}, \tag{7-45}$$

donde el número adimensional

$$M = \frac{U}{c}, \tag{7-46}$$

es llamado *número de Mach.*

Como se ve, la evaluación de la velocidad del sonido es de gran importancia en el movimiento de un fluido compresible.

Su determinación mediante la relación (7.42) no queda suficientemente aclarada, puesto que no precisa en qué condiciones se comprime el gas. Si *admitimos* que en ese fenómeno el gas se comporta como si tuviera viscosidad nula y no conduce calor, concluímos que el proceso de compresión se produce isoentrópicamente. (Ver 7.37)

Si entonces se expresa la presión como función de las coordenadas termodinámicas densidad y entropía

$$p = p\,(\rho, s)\,, \tag{7-47}$$

esto es

$$dp = (\frac{\partial p}{\partial s})_\rho\, ds + (\frac{\partial p}{\partial \rho})_s\, d\rho\,, \tag{7-48}$$

se tiene, para una leve compresión isoentrópica, $(ds = 0)$.

$$\boxed{c^2 = \frac{dp}{d\rho} = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_s} \tag{7-49}$$

Caso de un gas ideal

Se ha definido un gas ideal como un gas no viscoso, no conductor y que satiface la ecuación de estado (7.24)

$$p = \rho R \, \theta$$

En un proceso isoentrópico, esto es, adiabático, un gas ideal cumple con la relación (1.32) o (7-36)

$$p/\rho^k = \text{const.}$$

Por consiguiente la velocidad del sonido es

$$c = \sqrt{k \, \frac{p}{\rho}} = \sqrt{k R \, \theta} \tag{7-50}$$

Este resultado fue comprobado experimentalmente en el siglo XIX, y confirmó la hipótesis (hecha por Laplace) de que el fenómeno sonoro se producía en condiciones isoentrópicas.

Ejercicios

1. Determinar el cambio de temperatura que se produce a través de una onda infinitésima de presión cuando el cambio de velocidad es dU.

Respuesta: $$d\theta = \frac{\theta \, (k-1)}{c} \, dU$$

2. ¿Cuánto varía la velocidad del sonido en el aire cuando la temperatura varía de un grado cerca de la superficie terrestre (15°C), y en la estratosfera, (−55°C) ?

Respuesta: $$dc = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{kR}{\theta}} \; d\theta \, .$$

3. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el hidrógeno a 0° C, sabiendo que éste gas es 14.4 veces más ligero que el aire y que la k es la misma que para el aire?

Respuesta: 0.264 de la velocidad del aire.

4. Newton pensaba que la propagación del sonido se producía mediante un proceso isotermo . ¿Cuánto debía de ser la velocidad del sonido en el aire, a 20°C, en esa hipótesis?

Respuesta: 290 m/seg.

5. Un avión se desplaza horizontalmente a una velocidad subsónica U. ¿Cuál es la velocidad del sonido que emite, con respecto al propio avión, en un punto aguas arriba y en otro punto aguas abajo del mismo, situados sobre la trayectoria.?

Respuesta: $c - U$, $c + U$.

6. Trazar, para el caso del aire a 20° C, la curva que da el ángulo de Mach en función de la velocidad U, para números de Mach comprendidos entre 1 y 2.

7.4 Teorema de Bernoulli

El movimiento de un fluido compresible ideal es isoentrópico, como ya se ha visto. Por consiguiente el teorema de Bernoulli, para un régimen permanente se escribe, a lo largo de una línea de corriente (4.25)

$$\frac{U^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + \Omega = B. \tag{7-51}$$

Dado que las fuerzas de gravedad son despreciables y que se cumple (7.36) , la integración arroja inmediatamente

$$\boxed{\frac{U_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} \, \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{U_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} \, \frac{p_2}{\rho_2} \, .} \tag{7-52}$$

Se observa también que, según (7.30) ,

$$\frac{k}{k-1} \, \frac{p}{\rho} = \frac{c_p}{R} \, \frac{p}{\rho} = c_p \theta \tag{7-53}$$

El teorema de Bernoulli se escribe pues también

$$\boxed{\frac{U_1^2}{2} + c_p \, \theta_1 = \frac{U_2^2}{2} + c_p \, \theta_2 \, ,} \tag{7-54}$$

e indica que el flujo compresible isoentrópico, como era de esperar, involucra un cambio de temperatura del fluido.[2]

Condiciones de estancamiento

En un flujo cualquiera se llaman propiedades de estancamiento aquellos valores de la presión, densidad, temperatura, etc. que

[2] El lector observará que el hacer intervenir la temperatura en el teorema de Bernoulli, esencialmente "mecánico", implica aceptar la equivalencia del trabajo y el calor, es decir, la primera ley de la Termodinámica.

toma el fluido en una zona o en un punto en el cual la velocidad es *nula*.

Como ejemplos, cabe mencionar el caso de un fluido dentro de un depósito, o bien en un punto de estancamiento. Las propiedades de estancamiento pueden calcularse también en un punto cualquiera: representan las condiciones (usadas frecuentemente como referencia) que existirían en el punto, de hacer en él $U = 0$. (Ver 5-51).

Resulta fácil calcular los valores de estancamiento en función de las condiciones de flujo en un punto cualquiera a lo largo de una misma línea de corriente.

Así, por ejemplo, entre los puntos B_0 y B_1 se puede escribir, sabiendo que $U_0 = 0$

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2},$$

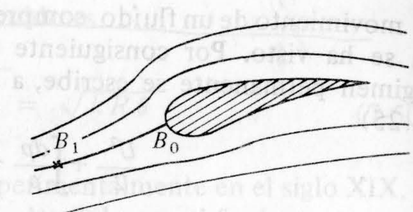


Figura 7.8.

de donde, despejando

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho} + \frac{k-1}{k}\frac{U^2}{2},$$

y por consiguiente

$$\frac{p_0}{p} = \frac{\rho_0}{\rho} + \frac{k-1}{k}\rho_0\frac{U^2}{2p} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/k}\left[1 + \frac{k-1}{k}\rho\frac{U^2}{2p}\right],$$

es decir, recordando (7.50)

$$\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{k-1}{2k}\rho\frac{U^2}{p}\right]^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{p_0}{p}\right]^{\frac{k}{k-1}} \left[1 + \frac{k-1}{2}\frac{U^2}{c^2}\right]^{\frac{k}{k-1}}$$

Se obtiene así la razón de la presión a la presión de estancamiento en función del número de Mach

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{k/k-1}} \qquad (7\text{-}55)$$

Esta relación es también válida cuando se quiere saber qué presión habría en un punto B cualquiera, si en él se redujese isoentrópicamente a cero la velocidad. Es la primera de las llamadas *relaciones isoentrópicas*, las cuales por su importancia, han sido calculadas, con los resultados indicados en forma de gráficos y de tablas. (Tablas 7 y 8).

Otras relaciones isoentrópicas se obtienen considerando las temperaturas y las densidades. En efecto, recordando que en un proceso adiabático

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} \qquad (7\text{-}56)$$

y

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/k} \qquad (7\text{-}57)$$

se obtiene

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2}M^2} \qquad (7\text{-}58)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{1/k-1}} \qquad (7\text{-}59)$$

También estas relaciones estan calculadas en las tablas 7 y 8.

Ejemplo 1:

Calcular la velocidad U en un punto P de una línea de corriente, dada la presión en ese punto y las condiciones de estancamiento en otro punto P_0. Se supondrá flujo isoentrópico. Determinar también la presión de estancamiento, dada U.

Aplicando el teorema de Bernoulli entre P_0 y P, se tiene

$$\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2},$$

de donde

$$\frac{U^2}{2} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho}\right) = \frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left(1 - \frac{p}{p_0}\frac{\rho_0}{\rho}\right)$$

P
P_0

Figura 7.9.

Recordando que

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k},$$

se obtiene la fórmula de St. Venant- Wantzel (1839):

$$U^2 = \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right] \qquad (7\text{-}60)$$

Ejemplo 2:

Demostrar que la velocidad del sonido en un gas ideal que se mueve con una velocidad U, es dada por

$$c^2 = c_0^2 - U^2 \frac{k-1}{2}$$

donde $c_0^2 = k \dfrac{p_0}{\rho_0}$ es la velocidad del sonido cuando el fluído está en resposo. Sabemos que

$$c^2 = k \frac{p}{\rho} .$$

Aplicando el teorema de Bernoulli entre un punto donde el fluido está en reposo y el punto donde tiene la velocidad U

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} ,$$

luego

$$\frac{c_0^2}{k-1} = \frac{c^2}{k-1} + \frac{U^2}{2} ,$$

de donde

$$c^2 = c_0^2 - \frac{k-1}{2} U^2 \tag{7-61}$$

Esa velocidad se llama *velocidad local* del sonido.

Ejercicios

1. Escribir el teorema de Bernoulli suponiendo un proceso isotermo de compresión entre dos puntos de una misma línea de corriente.

Respuesta:
$$\frac{U_2^2}{2} + gy_2 + R\theta_0 \ln \rho_2 = \frac{U_1^2}{2} + gy_1 + R\theta_0 \ln \rho_1 .$$

2. Un tubo colocado en la proa del ala de un avión mide la presión de estancamiento, que es de 1.5 bar, cuando la presión no perturbada es de 0.95 bar, y la temperatura de 10°C ¿Cuál es la velocidad del avión?

Respuesta: 282 m/seg.

3. Un ventilador centrífugo suple aire a una tubería de 30 cm de diámetro, que desemboca en la atmósfera, (1.013 bar). En un punto aguas arriba del extremo del tubo, un termómetro colocado en la corriente de aire indica 32°C y la velocidad media resulta ser de 35 m/seg. La caída de presión entre el punto considerado y la salida es de 15 cm. de agua. Suponiendo el flujo isoentrópico se pregunta:

a) Determinar el número de Mach en el punto donde se mide la temperatura. Se observará que puede existir duda acerca del significado de la lectura y se considerarán los dos casos posibles, a saber: que la temperatura indicada es la de estancamiento o que es la del medio circulante.

b) Calcular el caudal en masa y la densidad del fluido a la salida.

Respuesta: $M = 0.1$, $m = 2.9$ Kg/seg.

7.5 Flujo unidimensional isoentrópico

Conviene recordar que en un flujo unidimensional se considera el movimiento de un fluído a lo largo de un tubo de corriente, de manera tal que las mismas condiciones rigen en cada sección del tubo. Naturalmente dicha sección puede ser variable y si el fluido es compresible esa variación influye considerablemente en la naturaleza del movimiento.

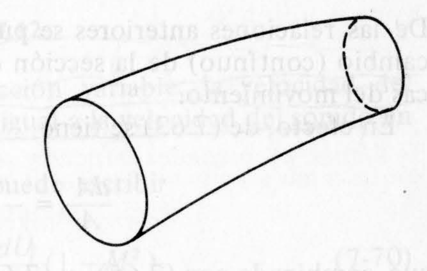


Figura 7.10.

Las ecuaciones fundamentales que rigen el flujo isoentrópico en un tubo han sido ya deducidas anteriormente:

a) *La ecuación de continuidad,* a saber, (3.14)

$$\rho UA = \text{const.} \tag{7-62}$$

o en forma diferencial

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} + \frac{dA}{A} = 0. \tag{7-63}$$

b) *La ecuación de Bernoulli*, como se ha visto, (7-52)

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \text{const.}$$

o bien, (7.54)

$$\left. c_p\,\theta + \frac{U^2}{2} = \text{const.} \right\} \quad (7\text{-}64)$$

También en forma diferencial, para un régimen estacionario y siempre despreciando la gravedad, (4.23),

o bien

$$\left. \begin{aligned} U\,dU + \frac{dp}{\rho} &= 0, \\ U\,dU + c_p\,d\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7\text{-}65)$$

c) *La relación de Laplace,* que da la velocidad del sonido, como fenómeno isoentrópico

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (7\text{-}66)$$

Teoremas de Hugoniot

De las relaciones anteriores se puede determinar la influencia de un cambio (contínuo) de la sección del tubo sobre las otras características del movimiento.

En efecto, de (7.63) se tiene

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dU}{U},$$

que, combinada con (7.65) y (7.66), conduce a

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho U^2}\,(1 - \frac{U^2}{c^2}) = \frac{dp}{\rho U^2}\,(1 - M^2), \quad (7\text{-}67)$$

o a

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dU}{U}\,(1 - \frac{U^2}{c^2}) = -\frac{dU}{U}\,(1 - M^2). \quad (7\text{-}68)$$

Estas relaciones constituyen las llamadas fórmulas de Hugoniot (1886), quien dedujo de ellas las siguientes propiedades:

1er. Teorema. En una zona de flujo subsónico ($M < 1$), la velocidad y el área de la sección varían en sentido contrario. Ello se deduce inmediatamente de la ecuación (7.68), escribiéndola

$$\frac{1}{A}\,\frac{dA}{dx} = -\frac{1}{U}\,\frac{dU}{dx}\,(1 - M^2), \quad (7\text{-}69)$$

donde x es la abscisa a lo largo del tubo de corriente.

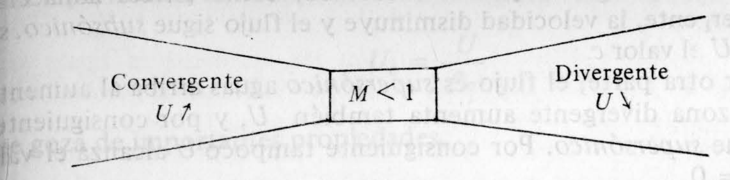


Figura 7.11.

Este resultado era ya conocido en el caso de un flujo de densidad constante. Vemos que se cumple también para un flujo compresible subsónico.

2do. Teorema. Es una zona de flujo ($M > 1$), la velocidad y el área de la sección recta varían en el mismo sentido.

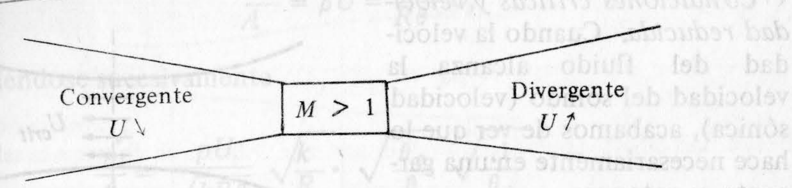


Figura 7.12

3er. Teorema. En un tubo de sección variable, la velocidad del fluido compresible sólo puede ser igual a la velocidad del sonido en la garganta.

En efecto la relación (7.68) se puede escribir

$$\frac{1}{A}\,\frac{dA}{dx} = -\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}\,(1 - M^2) \quad (7\text{-}70)$$

Si se admite que la velocidad no necesariamente pasa por un máximo o mínimo, esto es

$$\frac{dU}{dx} \neq 0$$

la condición $M = \dfrac{U}{c} = 1$

implica $\dfrac{dA}{dx} = 0. \quad (7\text{-}71)$

es decir que el *área* del tubo pasa por un máximo o un mínimo.

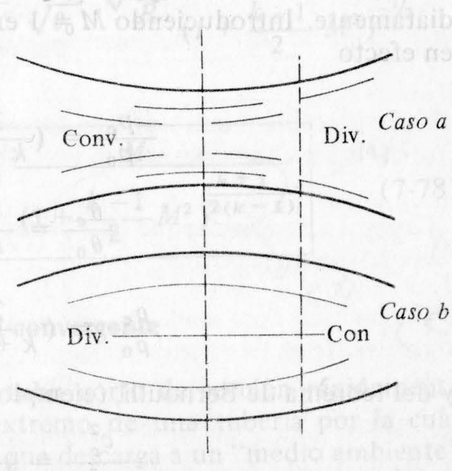


Figura 7.13.

Mostremos que no puede tratarse de un máximo, (caso *b*). En efecto si el flujo aguas arriba es *subsónico*, como en esa zona el tubo es divergente, la velocidad disminuye y el flujo sigue *subsónico*, sin alcanzar U el valor c.

Si, por otra parte, el flujo es *supersónico* aguas arriba al aumentar A en la zona divergente aumenta también U, y por consiguiente el flujo sigue *supersónico*. Por consiguiente tampoco U alcanza el valor c para $x = 0$.

Caso a: Si se repite este razonamiento, se ve que es físicamente posible que la condición (7.70) se cumpla, y por consiguiente, que implique la (7.71). Queda pues demostrado el teorema.

Es de observar que también $dA = 0$ cuando $dU = 0$, siendo $M = 1$, tanto en el caso *(a)* como en el *(b)* Luego $dA = 0$, no implica $M = 1$, y la recíproca del tercer teorema no es cierta.

Condiciones críticas y velocidad reducida. Cuando la velocidad del fluido alcanza la velocidad del sonido (velocidad sónica), acabamos de ver que lo hace necesariamente en una garganta, y entonces

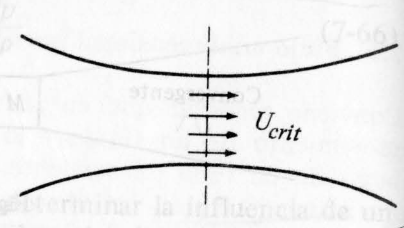


Figura 7.14.

$$M = 1.$$

Los valores de la presión, densidad y temperatura en esas condiciones se llaman propiedades *críticas* y se dice que se tiene un *flujo crítico*:

$$p_c,\ c_c,\ \theta_c\ .$$

Las relaciones isoentrópicas permiten calcular esas cantidades inmediatamente. Introduciendo $M = 1$ en (7.55), (7.58) y (7.59) se tiene en efecto

$$\frac{p_c}{p_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} \qquad (7\text{-}72)$$

$$\frac{\theta_c}{\theta_0} = \frac{2}{k+1}\,, \qquad (7\text{-}73)$$

$$\frac{\rho_c}{\rho_0} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \qquad (7\text{-}74)$$

y del teorema de Bernoulli, (ejemplo 7.4.2)

$$\frac{c_c^2}{c_0^2} = \frac{2}{k+1} \qquad (7\text{-}75)$$

Las propiedades críticas son a veces usadas como valores de referencia En particular, se llama *velocidad reducida* a la cantidad

$$U_c = \frac{U}{c_c} \qquad (7\text{-}76)$$

que goza de importantes propiedades.

Caudal

Por definición, el caudal en masa por unidad de área en una tubería, se puede calcular a partir de

$$\frac{\dot m}{A} = \rho U = \frac{p}{R\theta}\, U, \qquad (7\text{-}77)$$

obteniéndose sucesivamente

$$\frac{\dot m}{A} = \frac{pU}{\sqrt{kR\theta}}\, \sqrt{\frac{k}{R}} \cdot \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}\, \sqrt{\frac{1}{\theta_0}}$$

$$= p\, \frac{M}{\sqrt{\theta_0}}\, \sqrt{\frac{k}{R}}\, \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

Si se quiere obtener dicho caudal en función únicamente del número de Mach, se utiliza la relación isoentrópica (7-55).

$$\frac{\dot m}{A} = \frac{p_0}{(1 + \frac{k-1}{2} M^2)^{k/k-1}}\, \frac{M}{\sqrt{\theta_0}}\, \sqrt{\frac{k}{R}}\, \frac{1}{(1 + \frac{k-1}{2} M^2)^{1/2}}$$

de donde

$$\frac{\dot m}{A} = \frac{p_0}{\sqrt{\theta_0}}\, \sqrt{\frac{k}{R}}\, \frac{M}{(1 + \frac{k-1}{2} M^2)^{\frac{k+1}{2(k-1)}}} \qquad (7\text{-}78)$$

Flujo isoentrópico en una tobera convergente

Se llama tobera en general un tubo corto de sección rápidamente variable que se instala en el extremo de una tubería por la cual circula un fluido compresible y que descarga a un "medio ambiente" externo a la tubería, muy a menudo el aire.

Para estudiar las condiciones de funcionamiento de una tobera, se hace necesario precisar cuáles son éstas, aguas arriba y aguas abajo del aparato.

En el esquema adjunto se indican las condiciones aguas arriba mediante un supuesto depósito, donde se verifican las condiciones de estancamiento. Una tubería, cuya longitud no se toma en cuenta, une este depósito a la tobera. Aguas abajo, por otra parte se simboliza una cámara receptora que materializa el "medio ambiente" de salida y cuya presión puede ser controlada.

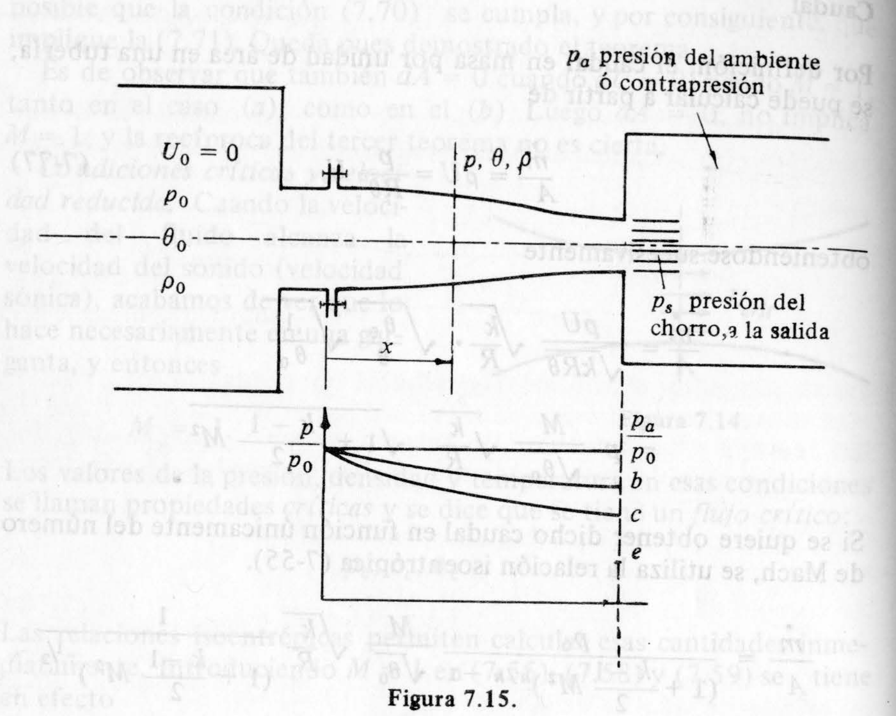


Figura 7.15.

El funcionamiento de una tobera como la descrita puede concebirse de la siguiente manera.

Caso a. Supóngase que la presión del ambiente aguas abajo es igual a la presión de reposo p_o

$$p_a = p_o \qquad (7\text{-}79)$$

Entonces, al no haber gradiente de presión, no hay escurrimiento. La presión es p_o en todas partes. Se trata del caso estático, y también

$$p_s = p_o$$

Caso b. Si la contrapresión es disminuida levemente, permaneciendo superior al valor crítico (p_c),

$$p_c < p_a < p_o$$

se inicia un *flujo subsónico* en la tobera y a la salida se tiene

$$M < 1, \; p_s = p_a \qquad (7\text{-}80)$$

Caso c. La contrapresión p_a es bajada hasta el valor crítico

$$p_c = p_a < p_0,$$

entonces el flujo es subsónico en la tobera, pero U alcanza la velocidad del sonido en la garganta.

$$M = 1, \; p_s = p_a = p_c \qquad (7\text{-}81)$$

En ese momento el caudal alcanza el *valor máximo,* dado por (7.78) con $M = 1$:

$$\frac{\dot{m}_{max}}{A_c} = \frac{p_0}{\sqrt{\theta_0}} \sqrt{\frac{k}{R}} \cdot \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \qquad (7\text{-}82)$$

Caso d. La contrapresión p_a se hace inferior a la presión crítica

$$p_a < p_c$$

Entonces el caudal *no* sigue aumentando puesto que la velocidad y demás condiciones en la garganta permanecen fijas. Se dice que la tobera está *estrangulada.*

Cuando este fenómeno ocurre, el chorro (sónico) de fluido, descarga en un ambiente a *menor presión* que lo circunda.

Posteriormente el chorro se mezcla con el ambiente mediante una serie de procesos no isoentrópicos (ondas de choque), como se verá más adelante, y también, en el caso real, por disipación viscosa.

La variación de presión a lo largo de la tobera para los casos considerados aparece representada cualitativamente en el gráfico adjunto al esquema de funcionamiento.

La variación de presión en el chorro a la salida p_s/p_o puede estudiarse en función de la presión del ambiente de salida o contrapresión.

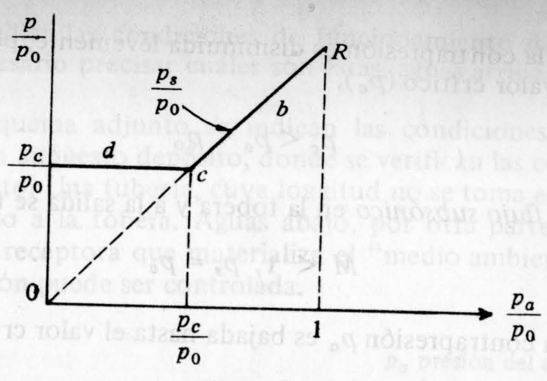


Figura 7.16.

Por otra parte la variación del caudal en función de la contrapresión es dada gráficamente en la figura, siendo $\dot{m}_{max}$ el obtenido previamente (7.82).

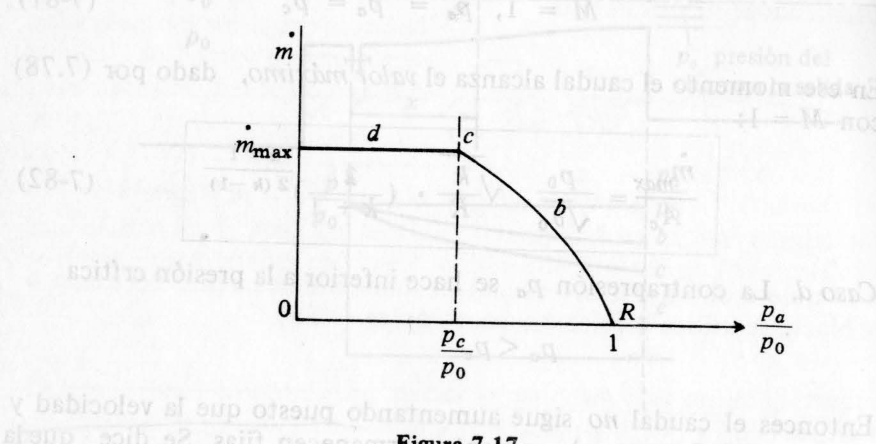


Figura 7.17.

Ejemplo 1:

Un pequeño cohete está equipado con una tobera convergente que, para ciertas condiciones de funcionamiento, despide una mezcla de combustible y de oxidante a razón de 5 Kg/seg. El peso molecular de esa mezcla puede tomarse de 100 y $k = 1.3$.

Si la temperatura de la combustión es de 2500°C y la presión interior de 35 bar, se pide estimar el empuje de la tobera si el gas descarga en la atmósfera donde la presión es de 1 bar.

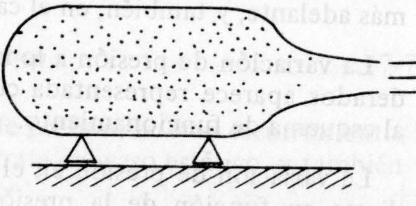


Figura 7.18.

Solución

Lo primero que ha de hacerse es estudiar cuál es el régimen de ese flujo. Para ello calculamos la presión crítica p_c. Partiendo de (7-72), tenemos

$$p_c = p_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = 35 \left(\frac{2}{2.3}\right)^{\frac{1.3}{0.3}} = 35 \times 0.546 = 19.10 \text{ bar}$$

Dado que la presión ambiental es $p_a = 1$ bar, se tiene

$$p_a < p_c$$

y el flujo en la tobera estará estrangulado.

El caudal (máximo) es dado por (7.82) y puesto que $\dot{m} = 5$ Kg/seg, se puede calcular el área de salida necesaria

$$A_c = \frac{\dot{m}}{\sqrt{\frac{k}{R\theta_0}}\, p_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k+1)}}}$$

El valor de R es conocido puesto que nos dan el peso molecular. Según (1.29)

$$R = \frac{R_0}{M} = \frac{8.314 \times 10^3}{100} = 83.14 \frac{\text{J}}{\text{kg°C}}$$

Luego

$$A_c = \frac{5}{\sqrt{\frac{1.3}{83.14 \times 2773}}\; 35 \times 10^5 \times (0.87)^{3.83}} = 10.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 10.3 \text{ cm}^2$$

Para saber la velocidad del chorro a la salida, se recuerda que

$$\frac{U}{c} = M$$

y, que, en el presente caso $M = 1$. Luego, (7.50)

$$U = \sqrt{kR\theta_c}\, M = \sqrt{kR\theta_0 \frac{2}{k+1}}\, M = \sqrt{1.3 \times 83.14 \times 2773 \frac{2}{2.3}}$$

$$= \sqrt{26.1 \times 10^4} = 510 \text{ m/seg.}$$

que es la velocidad del sonido a esta temperatura.

Para calcular el empuje se aplica ahora la ley de la cantidad de movimiento según el cual

$$F - (p_c - p_a) A_c = \dot{m} U$$

de donde

$$F = \dot{m} U + (p_c - p_a) A_c$$

$$= 5 \times 510 + 18.1 \times 10^5 \times 10.3 \times 10^{-4}$$

$$= 2550 + 1810 = 4360 \text{ N.}$$

Ejercicios

1. Determinar la expresión del caudal en masa dado por un tubo de Venturi en flujo compresible (subsónico) en función de las áreas delas secciones de entrada A_1 y de la garganta A_2 y de las presiones correspondientes.

Mostrar que se obtiene una expresión del tipo

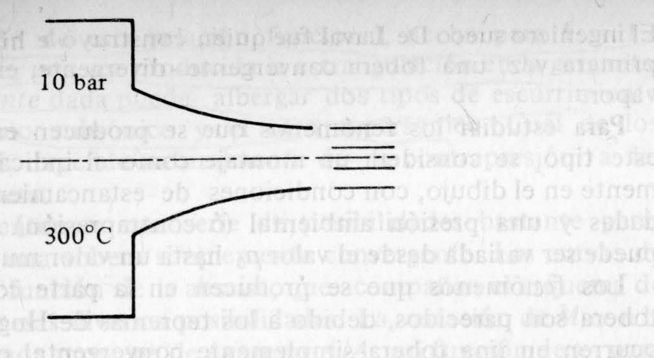
$$\dot{m} = Y A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_1 [1 - (\frac{A_2}{A_1})^2]}}$$

donde Y es el "factor de expansión" cuya expresión se evaluará. Se hará una representación gráfica de Y para $K = 1.4$ y diversos valores de p_2/p_1, tomando A_2/A_1 como parámetro.

Respuesta:
$$Y = \sqrt{\frac{\frac{k}{k-1} (\frac{p_2}{p_1})^{\frac{2}{k}} [1 - (\frac{p_2}{p_1})^{\frac{k-1}{k}}] [1 - (\frac{A_2}{A_1})^2]}{(1 - \frac{p_2}{p_1})(1 - (\frac{p_2}{p_1})^{\frac{2}{k}} (\frac{A_2}{A_1})^2)}}$$

2. En una tobera convergente encontrar la expresión del caudal en función de la presión del ambiente a la salida o contrapresión. Recordando el fenómeno de la estrangulación, comprobar el trazado dado en el texto.

3. Un gran recipiente de aire, en el cual la presión es de 10 bar y la temperatura es de 300°C, es puesto en relación con la atmósfera, donde la presión reinante es de 1 bar, mediante una tobera convergente cuya sección de salida es de 2 cm². Se pide el caudal en masa en la tobera.



Respuesta: 0.326 Kg/seg.

7.6 Flujo isoentrópico en una tobera convergente-divergente

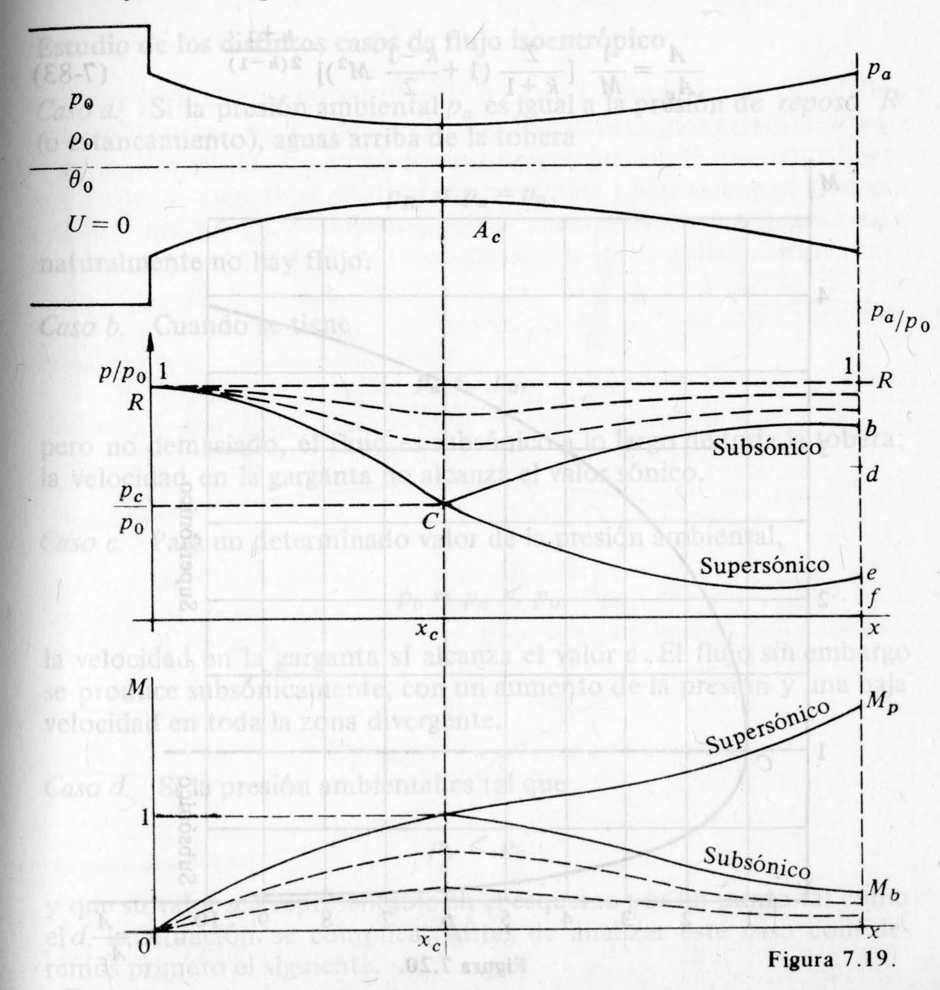


Figura 7.19.

El ingeniero sueco De Laval fue quien construyó e hizo funcionar por primera vez, una tobera convergente–divergente, en una turbina de vapor.

Para estudiar los fenómenos que se producen en una tobera de este tipo, se considera un montaje como el indicado esquemáticamente en el dibujo, con condiciones de estancamiento aguas arriba dadas y una presión ambiental (ó contrapresión) aguas abajo que puede ser variada desde el valor p_0 hasta un valor muy bajo.

Los fenómenos que se producen en la parte corvengente de la tobera son parecidos, debido a los teoremas de Hugoniot, a los que ocurren en una tobera simplemente convergente, como la ya estudiada. Para ver qué puede ocurrir en la zona divergente de la tobera, consideremos la expresión del caudal (7.78) y del caudal máximo (7.82). Dividiendo una por otra se obtiene

$$\frac{A}{A_c} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{k+1}\left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \qquad (7\text{-}83)$$

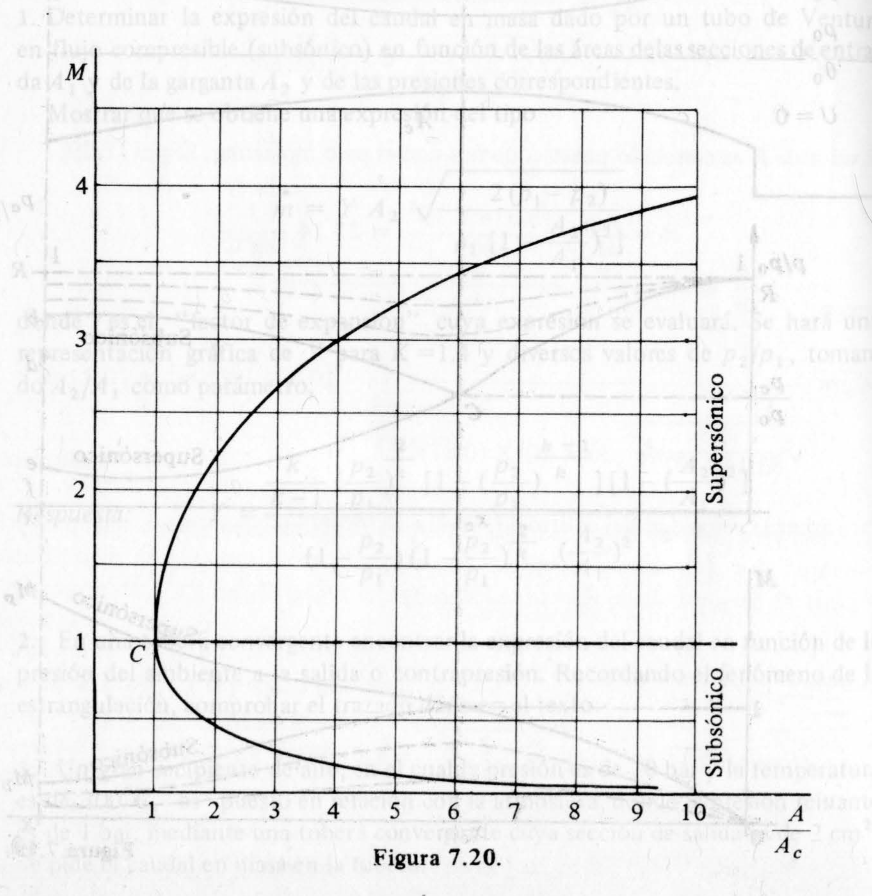


Figura 7.20.

La representación de esta relación funcional, hecha para $k = 1.4$ (aire), indica que, una vez producida la estrangulación en la garganta, la tobera *divergente* dada puede albergar dos tipos de escurrimiento *isoentrópicos:* uno subsónico y el otro supersónico. Cuál de los dos se producirá, depende naturalmente de la contrapresión a la salida de la tobera.

Se presenta entonces una serie de posibilidades bastante parecida al caso de una tobera simplemente convergente. Las curvas de p/p_0 y de M en función de la abscisa, que acompañan el esquema de montaje indican esas diversas posibilidades. La variación de M con la abscisa ahí indicada proviene de expresar A/A_c en función de x para una tobera dada y de utilizar la relación (7.83) para obtener las curvas CM_p y CM_b.

Estudio de los distintos casos de flujo isoentrópico

Caso a. Si la presión ambiental p_a es igual a la presión de *reposo* R (o estancamiento), aguas arriba de la tobera

$$p_R = p_a = p_0,$$

naturalmente no hay flujo.

Caso b. Cuando se tiene

$$p_a < p_0,$$

pero no demasiado, el flujo es subsónico a lo largo de toda la tobera; la velocidad en la garganta no alcanza el valor sónico.

Caso c. Para un determinado valor de la presión ambiental,

$$p_b = p_a < p_0$$

la velocidad en la garganta sí alcanza el valor c. El flujo sin embargo se produce subsónicamente, con un aumento de la presión y una baja velocidad en toda la zona divergente.

Caso d. Si la presión ambiental es tal que

$$p_a < p_b$$

y que su valor sea representable en el esquema por un punto tal como el d, la situación se complica. Antes de analizar este caso consideremos primero el siguiente.

Caso e. Si la presión ambiental ha bajado hasta un cierto valor p_e:

$$p_a = p_e$$

tal que corresponda al *flujo supersónico* previsto en la relación (7.83) y el gráfico adjunto, el flujo en la parte divergente de la tobera es totalmente supersónico, con un aumento de la velocidad al aumentar la sección, y una disminución de la presión. Las relaciones isoentrópicas (7.55) y (7.59) permiten calcular las características de ese flujo para una sección dada. Es de notar también que el paso de flujo subsónico al supersónico se produce de manera suave (continua) en la garganta de la tobera.

Caso d (bis). Volviendo al caso en que

$$p_e < p_a < p_b$$

el fluído se encuentra ahora en una situación conflictiva: por una parte la presión p_a es menor que la mínima a que se puede llegar mediante un flujo subsónico isoentrópico hasta la salida, pero es mayor que la que tendría, de ser el flujo totalmente supersónico. La naturaleza resuelve este problema mediante un cambio brusco y repentino de flujo: en una cierta sección de la zona divergente, se

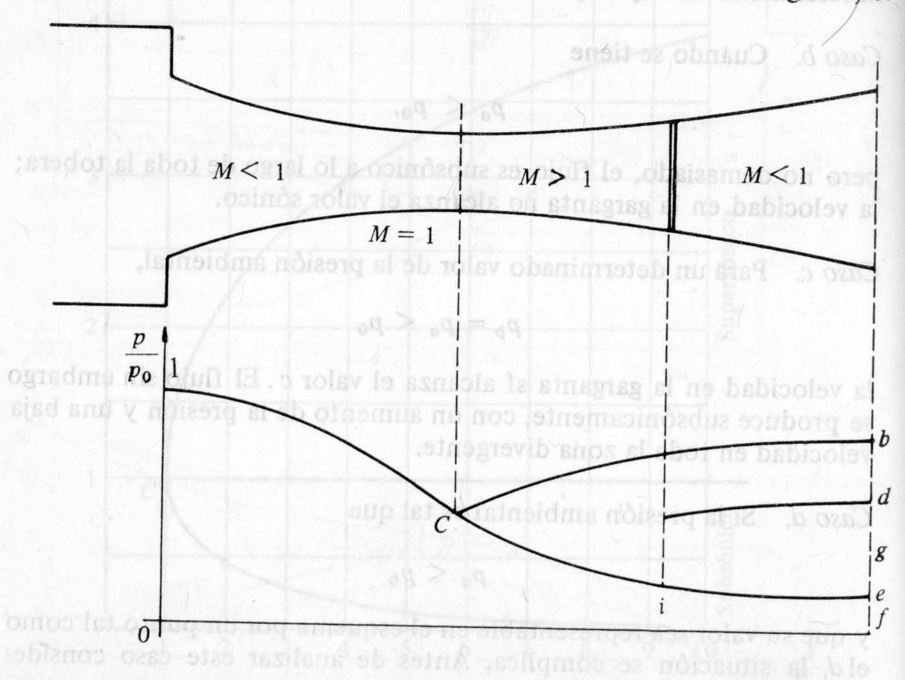


Figura 7.21.

produce una *onda de choque* es decir una región extremadamente estrecha en la cual hay un aumento repentino y finito de presión así como cambios correspondientes en la densidad y la temperatura. Los procesos internos que se desarrollan en la onda de choque son altamente *irreversibles*, de manera que en la tobera el flujo ya no es isoentrópico, aunque lo sigue siendo antes y despues de la onda.

Lo que ocurre en la tobera, entonces es lo siguiente: el flujo es subsónico aguas arriba de la garganta; se estrangula en ella y pasa a *supersónico* aguas abajo, hasta una sección intermedia y en donde se produce la *onda de choque* (onda de choque *normal* si no se toman en cuenta ciertos efectos secundarios a considerar más tarde). De ahí en adelante, el flujo es de nuevo *subsónico*, saliendo el extremo de la tobera en un chorro cuya presión es la del medio ambiente $p_\theta = p_d$.

Caso f. Si

$$p_f = p_a < p_e,$$

se tiene otro caso de flujo que necesita una discontinuidad para adaptarse a la presión ambiental exterior.

Sin embargo, en este caso, el flujo dentro de la tobera es totalmente isoentrópico: subsónico en la zona convergente, *supersónico* en la divergente. Al salir al medio ambiente la presión del chorro es p_e: mediante ondas de choque normales y oblicuas fuera de la tobera -este se acomoda a la presión ambiental menor. Este punto será discutido también más abajo.

Es evidente de lo dicho, que se impone un estudio más detallado del nacimiento y las propiedades de las ondas de choque.

Ejemplo 2:

a. Si el cohete del ejemplo 1 es equipado ahora con una sección *divergente* adicional de manera que la presión de salida resulte reducida exactamente a la presión del ambiente (expansión completa), se pide el empuje bajo esas condiciones.

b. Calcular también el empuje suponiendo que el área de salida de la sección divergente es disminuída en un 10% con respecto al área necesaria para una expansión completa.

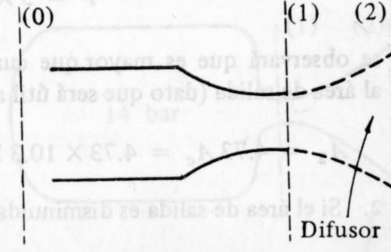


Figura 7.22.

Solución

1. La presión en la garganta es la presión crítica

$$p_c = 19.10 \text{ bar}$$

previamente encontrada. Si esa presión ha de ser reducida a 1 bar isoentrópicamente, ello es sólo posible mediante un flujo supersónico en el difusor, ya que sólo éste permite una baja de presión. El número de Mach en la garganta es, pues, $M_1 = 1$.

En la sección (2) la presión ha de ser ambiental

$$p_2 = p_a,$$

luego

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{1}{35} = 0.0286.$$

Con este valor y usando la relación isoentrópica (7·55) se calcula M_2, y de ahí, aplicando las otras dos relaciones isoentrópicas (7.58) y (7.59) se obtienen los valores de Θ_2/Θ_0 y p_2/p_0, así como A/A_c a partir de (7-83).

El uso de las tablas al final del capítulo alivia considerablemente estos cálculos. En el caso presente se tiene

$$M_2 = 2.93, \; \rho_2/\rho_0 = 0.063, \; \theta/\theta_0 = 0.438, \; \frac{A_2}{A_c} = 4.73$$

Conocido el número de Mach, se calcula la velocidad del fluido

$$U_2 = M_2 c_2 = \sqrt{kR\theta_2}\, M_2 = \sqrt{1.3 \times 8314 \times 0.438 \times 2773} \times 2.93$$

$$= 10^2 \times \sqrt{13{,}15} \times 2.93 = 1060 \text{ m/seg.}$$

La fuerza de empuje es

$$F = 5 \times 1060 = \underline{5300 \text{ N.}}$$

se observará que es mayor que cuando la tobera no tenía difusor. En cuanto al área de salida (dato que será útil a continuación), se tiene

$$A_2 = 4.73\, A_c = 4.73 \times 10.3 \times 10^{-4} = 48.7 \times 10^{-4}\, m^2 = 48.7 \text{ cm}^2.$$

2. Si el área de salida es disminuida en un 10% se tiene el *nuevo* valor

$$A'_2 = 0.9 \times 48.7 \times 10^{-4} = 43.9 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

por consiguiente, entonces

$$\frac{A'_2}{A_c} = 0.9\frac{A_2}{A_c} = 0.9 \times 4.73 = 4.26$$

con este valor y utilizando las relaciones isoentrópicas se calculan los nuevos valores M'_2, ρ'_2/ρ, θ'_2/θ y p'_2/p_0. Utilizando las tablas se obtiene

$$M'_2 = 2.83; \; \frac{p'_2}{p_0} = 0.0325; \; \frac{\rho'_2}{\rho_0} = 0.072; \; \frac{\theta'_2}{\theta_0} = 0.454.$$

la presión en el chorro de salida es ahora

$$p'_2 = 35 \times 0.0325 = 1.14 \text{ bar}$$

es decir que la presión ambiental ($p_a = 1$ bar) se encuentra en la situación del punto f de la Figura, con

$$p_f = p_a = 1 \text{ bar} < p'_2 = p_e = 1.14 \text{ bar.}$$

la velocidad es entonces

$$U'_2 = M'_2\sqrt{kR\;\theta'_2} = 2.83 \times \sqrt{1.3 \times 83.14 \times 0.454 \times 2773} = 1054 \text{ m/seg}$$

Empuje:

$$F = \mathring{m}\, U'_2 + (p'_2 - p_a) A'_2 = 5225 + 60 = \underline{5285 \text{ N}}$$

Ejemplo 3:

Una tobera para un cohete ideal ha de funcionar a una altura en que la presión del aire es de 0.12 bar, (aproximadamente 31000 m en una atmósfera normal).

Si ha de dar un empuje de 7000 Newtons cuando la presión generada del motor es de 14 bar y la temperatura es 2800°C, se pide cuáles son las áreas óptimas de la garganta y de la salida. Tómese $k = 1.40$ y $R = 290 \; \frac{m^2}{seg^2 \, ^\circ K}$

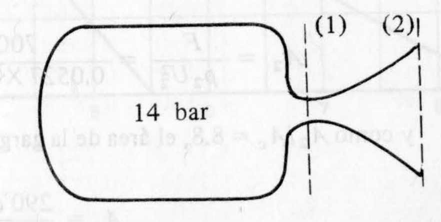


Figura 7.23.

Solución:

Las condiciones dadas dentro del motor, son las de estancamiento. Las condiciones óptimas se producen cuando el flujo es isoentrópico sub y supersónico, sucesivamente,

$$p_0 = 14 \times 10^5 \frac{N}{m^2} \qquad \theta_0 = 2800 + 273 = 3073\,^\circ K$$

Comparando con la salida, se tiene la relación de presiones

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{0.12}{14} = 0.00858$$

De las tablas isoentrópicas se deduce que, con $k = 1.4, M_2 = 3.8$ y

$$\frac{A_2}{A_c} = 8.8, \qquad \frac{\theta_2}{\theta_0} \cong 0.256$$

Luego la temperatura de los gases a la salida es

$$\theta_2 = 0.256 \times 3073 = 785\,^\circ K$$

Velocidad a la salida:

$$U_2 = c_2 M_2 = 3.8 \times \sqrt{1.4 \times 290 \times 785} = 2140 \text{ m/seg}$$

Para el cálculo del empuje hay que calcular la densidad

$$\rho_2 = \frac{p_2}{R\theta_2} = \frac{0.12 \times 10^5}{290 \times 785} = 0.0527 \text{ kg/m}^3$$

De la ecuación del empuje

$$F = 7000 \text{ N} = \rho_2 A_2 U_2^2,$$

se deduce el área de salida de la tobera

$$A_2 = \frac{F}{\rho_2 U_2^2} = \frac{7000}{0.0527 \times 2.140^2 \times 10^6} = 10^{-3} \times 29 \text{ m}^2$$

y como $A_2/A_c = 8.8$, el área de la garganta

$$A_c = \frac{290 \text{ cm}^2}{8.8} = 33 \text{ cm}^2$$

Tabla 7.1 Relaciones isoentrópicas, k = 1.4

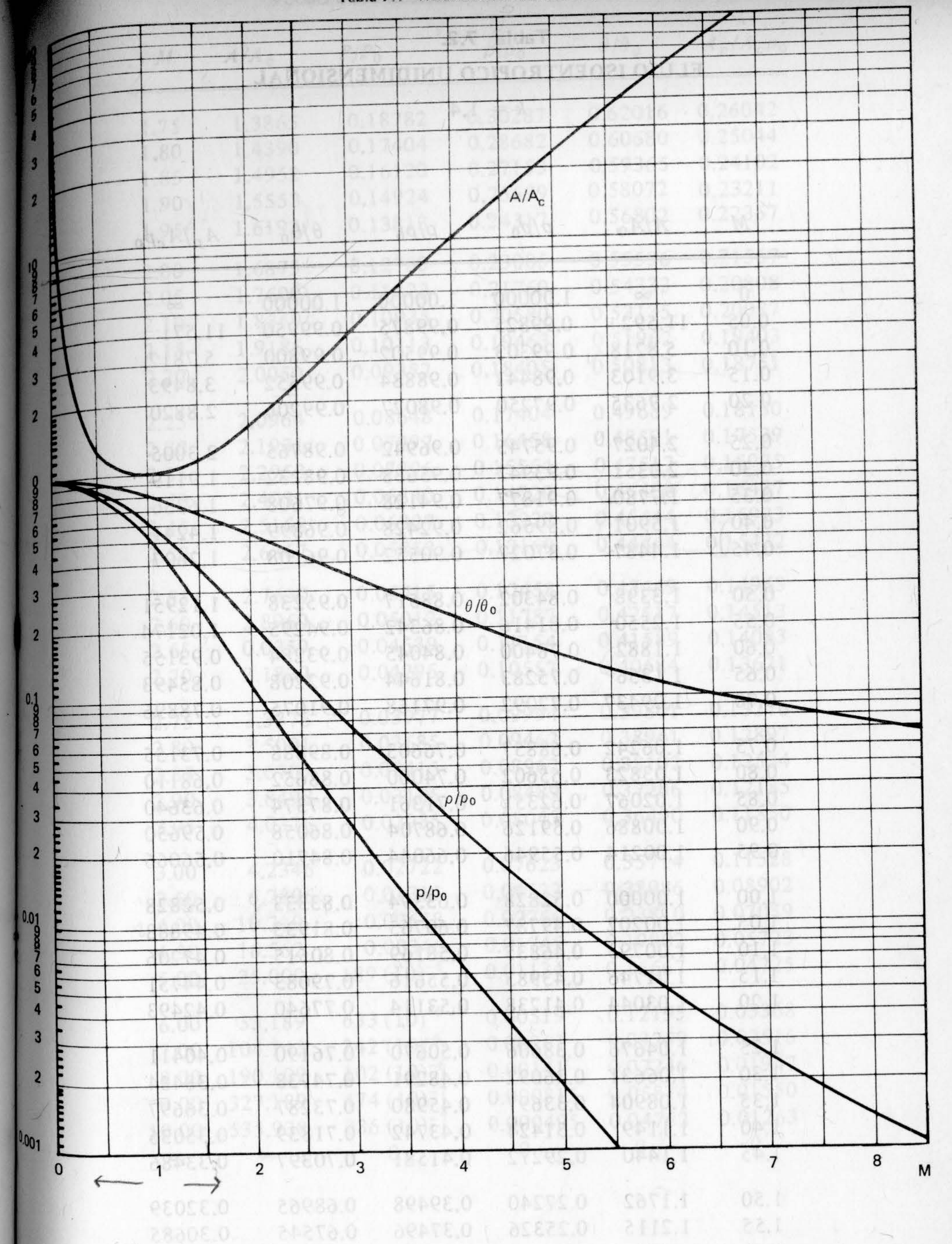


Tabla 7.2.

FLUJO ISOENTROPICO UNIDIMENSIONAL

$k = 1.4$

M	A/A_*	p/p_0	ρ/ρ_0	θ/θ_0	$A_p/A_c p_0$
0	∞	1.00000	1.00000	1.00000	∞
0.05	11.592	0.99825	0.99875	0.99950	11.571
0.10	5.8218	0.99303	0.99502	0.99800	5.7812
0.15	3.9103	0.98441	0.98884	0.99552	3.8493
0.20	2.9635	0.97250	0.98027	0.99206	2.8820
0.25	2.4027	0.95745	0.96942	0.98765	2.3005
0.30	2.0351	0.93947	0.95638	0.98232	1.9119
0.35	1.7780	0.91877	0.94128	0.97608	1.6336
0.40	1.5901	0.89562	0.92428	0.96899	1.4241
0.45	1.4487	0.87027	0.90552	0.96108	1.2607
0.50	1.3398	0.84302	0.88517	0.95238	1.12951
0.55	1.2550	0.81416	0.86342	0.94295	1.02174
0.60	1.1882	0.78400	0.84045	0.93284	0.93155
0.65	1.1356	0.75283	0.81644	0.92208	0.85493
0.70	1.09437	0.72092	0.97158	0.91075	0.78896
0.75	1.06242	0.68857	0.76603	0.89888	0.73155
0.80	1.03823	0.65602	0.74000	0.88652	0.68110
0.85	1.02067	0.62351	0.71361	0.87374	0.63640
0.90	1.00886	0.59126	0.68704	0.86058	0.59650
0.95	1.00214	0.55946	0.66044	0.84710	0.56066
1.00	1.00000	0.52828	0.63394	0.83333	0.52828
1.05	1.00202	0.49787	0.60765	0.81933	0.49888
1.10	1.00793	0.46835	0.58169	0.80515	0.47206
1.15	1.01746	0.43983	0.55616	0.79083	0.44751
1.20	1.03044	0.41238	0.53114	0.77640	0.42493
1.25	1.04676	0.38606	0.50670	0.76190	0.40411
1.30	1.06631	0.36092	0.48291	0.74738	0.38484
1.35	1.08904	0.33697	0.45980	0.73287	0.36697
1.40	1.1149	0.31424	0.43742	0.71839	0.35036
1.45	1.1440	0.29272	0.41581	0.70397	0.33486
1.50	1.1762	0.27240	0.39498	0.68965	0.32039
1.55	1.2115	0.25326	0.37496	0.67545	0.30685
1.60	1.2502	0.23527	0.35573	0.66138	0.29414
1.65	1.2922	0.21839	0.33731	0.64746	0.28221
1.70	1.3376	0.20259	0.31969	0.63372	0.27099

M	A/A_c	P/P_0	ρ/ρ_0	θ/θ_0	$A_p/A_c p_0$
1.75	1.3865	0.18782	0.30287	0.62016	0.26042
1.80	1.4390	0.17404	0.28682	0.60680	0.25044
1.85	1.4952	0.16120	0.27153	0.59365	0.24102
1.90	1.5552	0.14924	0.25699	0.58072	0.23211
1.95	1.6193	0.13813	0.24317	0.56802	0.22367
2.00	1.6875	0.12780	0.23005	0.55556	0.21567
2.05	1.7600	0.11823	0.21760	0.54333	0.20808
2.10	1.8369	0.10935	0.20580	0.53135	0.20087
2.15	1.9185	0.10113	0.19463	0.51962	0.19403
2.20	2.0050	0.09352	0.18405	0.50813	0.18751
2.25	2.0964	0.08648	0.17404	0.49689	0.18130
2.30	2.1931	0.07997	0.16458	0.48591	0.17539
2.35	2.2953	0.07396	0.15564	0.47517	0.16975
2.40	2.4031	0.06840	0.14720	0.46468	0.16437
2.45	2.5168	0.06327	0.13922	0.45444	0.15923
2.50	2.6367	0.05853	0.13169	0.44444	0.15432
2.55	2.7630	0.05415	0.12458	0.43469	0.14963
2.60	2.8960	0.05012	0.11787	0.42517	0.14513
2.65	0.0359	0.04639	0.11154	0.41589	0.14083
2.70	3.1830	0.04295	0.10557	0.40684	0.13671
2.75	3.3376	0.03977	0.09994	0.39801	0.13276
2.80	3.5001	0.03685	0.09462	0.38941	0.12897
2.85	3.6707	0.03415	0.08962	0.38102	0.12534
2.90	3.8498	0.03165	0.08489	0.37286	0.12185
2.95	4.0376	0.02935	0.08043	0.36490	0.11850
3.00	4.2346	0.02722	0.07623	0.35714	0.11528
3.50	6.7896	0.01311	0.04523	0.28986	0.08902
4.00	10.719	0.00658	0.02766	0.23810	0.07059
4.50	16.562	0.00346	0.01745	0.19802	0.05723
5.00	25.000	$189\,(10)^{-5}$	0.01134	0.16667	0.04725
6.00	53.189	$633\,(10)^{-6}$	0.00519	0.12195	0.03368
7.00	104.143	$242\,(10)^{-6}$	0.00261	0.09259	0.02516
8.00	190.109	$102\,(10)^{-6}$	0.00141	0.07246	0.01947
9.00	327.189	$474\,(10)^{-7}$	0.000815	0.05814	0.01550
10.00	535.938	$236\,(10)^{-7}$	0.000495	0.04762	0.01263
∞	∞	0	0	0	0

Tabla 7.3.

FLUJO ISOENTROPICO UNIDIMENSIONAL

$k = 1.3$

M	A/A_c	p/p_0	ρ/ρ_0	θ/θ_0	$Ap/A_c p_0$
0	∞	1.0000	1.0000	1.0000	∞
0.05	11.721	0.9984	0.9988	0.9996	11.702
0.10	5.885	0.9936	0.9951	0.9985	5.848
0.15	3.952	0.9855	0.9889	0.9966	3.895
0.20	2.994	0.9744	0.9803	0.9940	2.917
0.25	2.426	0.9603	0.9694	0.9907	2.330
0.30	2.054	0.9435	0.9563	0.9867	1.938
0.35	1.793	0.9241	0.9411	0.9820	1.657
0.40	1.602	0.9023	0.9240	0.9766	1.446
0.45	1.459	0.8784	0.9051	0.9705	1.281
0.50	1.348	0.8526	0.8845	0.9638	1.1491
0.55	1.261	0.8251	0.8625	0.9566	1.0407
0.60	1.193	0.7962	0.8392	0.9488	0.9501
0.65	1.139	0.7662	0.8148	0.9404	0.8731
0.70	1.0972	0.7354	0.7895	0.9315	0.8069
0.75	1.0644	0.7040	0.7634	0.9222	0.7493
0.80	1.0395	0.6723	0.7367	0.9124	0.6988
0.85	1.0214	0.6403	0.7096	0.9022	0.6540
0.90	1.0092	0.6084	0.6823	0.8917	0.6140
0.95	1.0022	0.5768	0.6549	0.8808	0.5781
1.00	1.0000	0.5457	0.6276	0.8696	0.5457
1.05	1.0021	0.5152	0.6004	0.8581	0.5163
1.10	1.0083	0.4854	0.5735	0.8464	0.4895
1.15	1.0183	0.4565	0.5470	0.8345	0.4649
1.20	1.0321	0.4285	0.5210	0.8224	0.4423
1.25	1.0495	0.4015	0.4956	0.8102	0.4214
1.30	1.0704	0.3756	0.4709	0.7978	0.4021
1.35	1.0948	0.3509	0.4468	0.7853	0.3842
1.40	1.123	0.3273	0.4235	0.7728	0.3675
1.45	1.154	0.3049	0.4010	0.7603	0.3519
1.50	1.189	0.2836	0.3793	0.7477	0.3374
1.55	1.228	0.2635	0.3585	0.7351	0.3237
1.60	1.271	0.2446	0.3385	0.7225	0.3109
1.65	1.318	0.2268	0.3194	0.7100	0.2989
1.70	1.369	0.2101	0.3011	0.6976	0.2875

M	A/A_c	p/p_0	ρ/ρ_0	θ/θ_0	$Ap/A_c p_0$
1.75	1.424	0.1944	0.2836	0.6852	0.2768
1.80	1.484	0.1797	0.2670	0.6729	0.2667
1.85	1.549	0.1660	0.2513	0.6607	0.2571
1.90	1.618	0.1533	0.2364	0.6487	0.2481
1.95	1.693	0.1415	0.2222	0.6368	0.2395
2.00	1.773	0.1305	0.2087	0.6250	0.2313
2.05	1.859	0.1203	0.1960	0.6134	0.2236
2.10	1.951	0.1108	0.1841	0.6019	0.2162
2.15	2.050	0.1020	0.1728	0.5905	0.2092
2.20	2.156	0.0939	0.1621	0.5793	0.2025
2.25	2.268	0.08645	0.1521	0.5684	0.1961
2.30	2.388	0.07955	0.1427	0.5576	0.1900
2.35	2.517	0.07318	0.1338	0.5470	0.1842
2.40	2.654	0.06731	0.1254	0.5365	0.1786
2.45	2.799	0.06190	0.1176	0.5262	0.1733
2.50	2.954	0.05692	0.1103	0.5161	0.1682
2.55	3.119	0.05234	0.1034	0.5062	0.1633
2.60	3.295	0.04813	0.09693	0.4065	0.1586
2.65	3.482	0.04426	0.09087	0.4870	0.1541
2.70	3.681	0.04070	0.08520	0.4777	0.1498
2.75	3.892	0.03743	0.07988	0.4686	0.1457
2.80	4.116	0.03442	0.07490	0.4596	0.1417
2.85	4.354	0.03166	0.07024	0.4508	0.1379
2.90	4.607	0.02913	0.06587	0.4422	0.1342
2.95	4.875	0.02680	0.06178	0.4338	0.1307
3.0	5.160	0.02466	0.05796	0.4255	0.12726
3.5	9.110	0.01090	0.03092	0.3524	0.09926
4.0	15.94	0.00498	0.01692	0.2941	0.07934
4.5	27.39	0.00236	0.00954	0 2477	0.06471
5.0	45.95	0.00117	0.00555	0.2105	0.05372
6.0	120.1	$32\,(10)^{-6}$	0.00206	0.15625	0.03856
7.0	285.3	$10\,(10)^{-6}$	$847\,(10)^{-6}$	0.11976	0.02882
8.0	625.2	$360\,(10)^{-7}$	$382\,(10)^{-6}$	0.09434	0.02251
9.0	1275	$141\,(10)^{-7}$	$186\,(10)^{-6}$	0.07605	0.01798
10.0	2438	$605\,(10)^{-8}$	$968\,(10)^{-7}$	0.06250	0.01475
∞	∞	0	0	0	0

7.7 Onda de choque normal

Como se ha sugerido anteriormente, una onda de choque es una onda en la cual se produce un cambio *repentino* y *finito* de las propiedades del fluído: presión, densidad y temperatura.

Es útil ahondar un poco más en el mecanismo de posible producción de una onda de choque.

Para ello podemos observar que una onda finita de presión puede considerarse como la superposición de una serie de ondas infinitésimas. Consideremos entonces el mismo pistón que en la sección 7-3 nos permitió estudiar la generación de una onda de sonido.

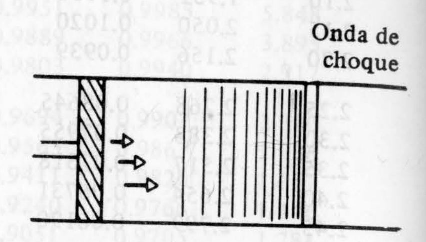
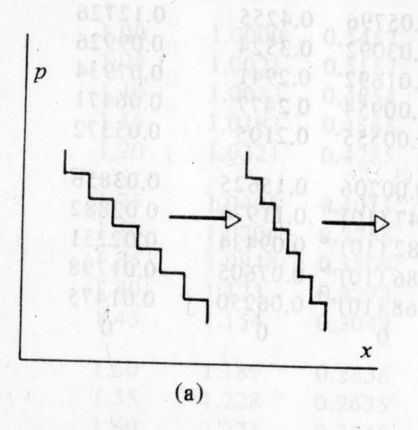


Figura 7.24.

Si este pistón genera una sucesión rápida de ondas infinitésimas de *presión*, como se indica en el esquema (a) de la figura, estas ondas se van *amontonando* a medida que se propagan: en efecto a cada aumento (infinitésimo) de la presión corresponde un aumento de la temperatura y, por consiguiente, un aumento de la velocidad. De manera que las ondas últimamente generadas viajan más rápidamente que las primeras y (si se olvida el posible efecto contrario de la viscosidad y de la conducción del calor) las alcanzan, produciéndose un frente de ondas a través del cual la presión, temperatura y densidad presentan una discontinuidad: se ha generado una *onda de choque*, cuya velocidad, además puede ser mayor que la del sonido.



p x (b)

Ondas infinitésimas de presión — Ondas infinitésimas de depresión

Figura 7.25.

Es de notar que si el pistón produjese una onda de *depresión* infinitésima, moviéndose hacia atrás, un razonamiento paralelo muestra que *no* hay en ese caso acumulación de ondas, sino al contrario (esquema b). Por consiguiente una onda de depresión se "diluye" siempre en el medio ambiente sin formar choque.

Como se vió ya anteriormente (cono de Mach), las ondas de choque pueden ser *normales* u oblicuas. En un primer estudio del flujo unidimensional, se considera sólo el caso normal, esto es, de la onda perpendicular al movimiento.

Relaciones de Rankine-Hugoniot

El primero en prever el fenómeno de la onda de choque fué B. Riemann, pero Rankine y Hugoniot, trabajando separadamente, dieron la formulación que todavía usamos.

Sea pues una onda de choque normal. Tomando en cuenta que su espesor es muy pequeño, $(2.5 \times 10^{-5}\,\text{m})$ y sin entrar a considerar los fenómenos altamente irreversibles que en ella se producen, consideremos un volumen de control que encierre la onda y apliquemos las leyes básicas ya conocidas.

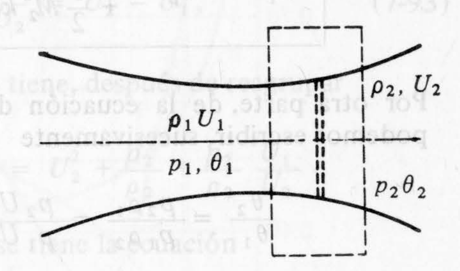


Figura 7.26.

Continuidad:

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 \qquad (7\text{-}84)$$

Cantidad de movimiento:

$$(p_1 - p_2)\,A = \dot{m}\,(U_2 - U_1)$$

o sea

$$(p_1 - p_2) = \rho_2 U_2^2 - \rho_1 U_1^2 \qquad (7\text{-}85)$$

Ecuación de la energía, esto es, el teorema de Bernoulli, para un proceso adiabático, (7.54) ó (7-52)

$$C_p\theta_1 + \frac{U_1^2}{2} = C_p\theta_2 + \frac{U_2^2}{2}$$

o bien

$$U_1^2 + \frac{2k}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = U_2^2 + \frac{2k}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2} \qquad (7\text{-}86)$$

De las dos primeras ecuaciones y recordando la expresión de la velocidad del sonido y la definición del número de Mach, encontramos

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2} \qquad (7\text{-}87)$$

Se obtiene así la relación de presiones en función de los números de Mach antes y después del choque. Asimismo se obtiene la relación de temperaturas a partir de las (7.86) escribiendo

$$c_p\theta_1 + \frac{1}{2} M_1^2 k R \theta_2 = c_p\theta_2 + \frac{1}{2} M_2 k R \theta_2$$

de donde

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{c_p + \frac{1}{2} M_1^2 k R}{c_p + \frac{1}{2} M_2^2 k R} = \frac{1 + \frac{1}{2}(k-1) M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(k-1) M_2^2} \qquad (7\text{-}88)$$

Por otra parte, de la ecuación de estado y de continuidad (7.84) podemos escribir, sucesivamente

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{p_2\rho_1}{p_1\rho_2} = \frac{p_2 U_2}{p_1 U_1} = \frac{p_2 M_2}{p_1 M_1}\sqrt{\frac{k R \theta_2}{k R \theta_1}}$$

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \left(\frac{p_2 M_2}{p_1 M_1}\right)^2 \qquad (7\text{-}89)$$

Comparando esta ecuación con (7.88) y recordando (7.87) se tiene

$$\left(\frac{1 + k M_1^2}{1 + k M_2^2}\right)^2 \frac{M_2^2}{M_1^2} = \frac{1 + \frac{1}{2}(k-1) M_1^2}{1 + \frac{1}{2}(k-1) M_2^2}, \qquad (7\text{-}90)$$

relación que se puede poner como

$$(M_2^2 - M_1^2)\left[1 + \frac{k-1}{2}(M_2^2 + M_1^2) - k M_1^2 M_2^2\right] = 0. \qquad (7\text{-}91)$$

En esta ecuación una solución es

$$M_1 = M_2$$

Esto corresponde naturalmente a que no hay onda de choque. Otra solución es

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}}. \qquad (7\text{-}92)$$

Esta relación muestra que el número de Mach aguas abajo de la onda de choque normal está determinado por el número de Mach aguas arriba, de manera que las ecuaciones (7.87) y (7.88) se pueden reescribir en función únicamente de M_1.

La variación de la densidad al cruzar la onda de choque se obtiene de eliminar las velocidades en las ecuaciones (7.84) y (7.86).

En efecto, dividiendo la (7.85) por la (7.84)

$$\frac{p_1}{\rho_1 U_1} - \frac{p_2}{\rho_2 U_2} = U_2 - U_1, \qquad (7\text{-}93)$$

y multiplicando por $U_2 + U_1$, se tiene, después de reagrupar

$$U_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_1}{\rho_1}\frac{U_2}{U_1} = U_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{p_2}{\rho_2}\frac{U_1}{U_2}.$$

Aplicando nuevamente la (7.84) se tiene la ecuación

$$U_1^2 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{p_1 U_2}{\rho_2 U_2} = U_2^2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{p_2 U_1}{\rho_1 U_1},$$

y ahora restándola la (7.86)

$$\frac{p_1}{\rho_2} - \frac{k+1}{k-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_1} - \frac{k+1}{k-1}\frac{p_2}{\rho_2}$$

Multiplicando por $(k\text{-}1)\, p_2/\rho_2$ se tiene finalmente

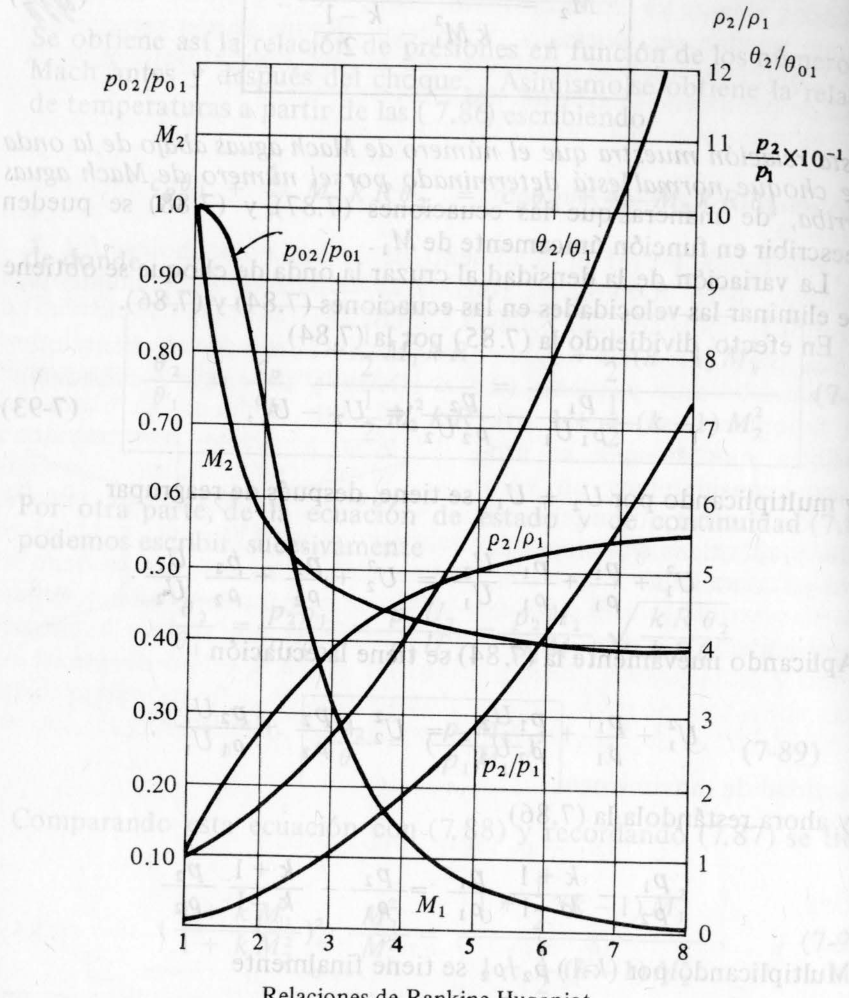
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k-1 + (k+1)\, p_2/p_1}{k+1 + (k-1)\, p_2/p_1}. \qquad (7\text{-}94)$$

Esta es, en particular, la llamada relación de Rankine-Hugoniot.

Es de observar que las ecuaciones (7.87), (7.86) y (7.94), cuando se complementan con la (7.92), permiten obtener las condiciones del

flujo aguas abajo de la onda de choque, conocidas las condiciones aguas arriba y el número de Mach M_1.

Escritas en forma adimensional, la única variable independiente es M_1 por lo cual se hace fácil tabular sus valores.



Relaciones de Rankine-Hugoniot
Onda de choque normal K = 1.4

Figura 7.27

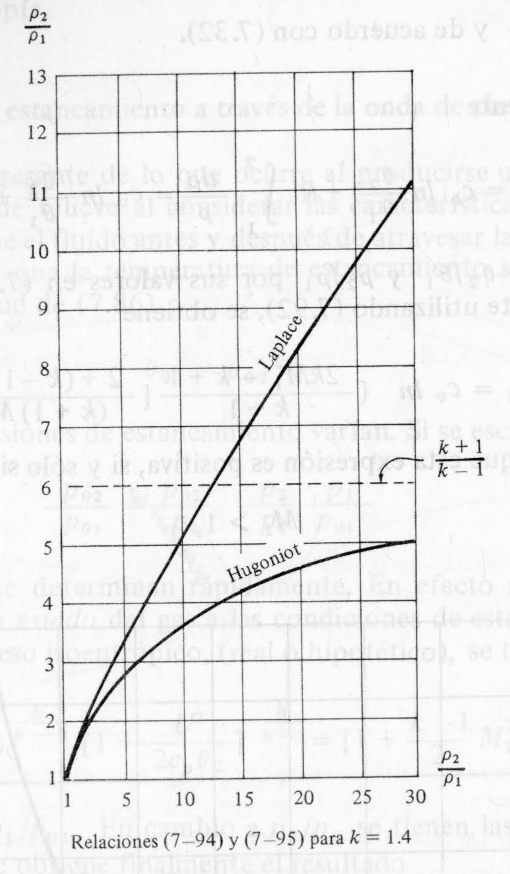
Irreversibilidad de la onda de choque

Ya se ha visto la importancia práctica de las fórmulas anteriores. Por otra parte, la ecuación (7.94), debida inicialmente a Hugoniot,

permite apreciar para una onda de choque dada, cuan apartadas están las condiciones de flujo del caso isoentrópico. En este caso, en efecto, la relación ρ_2/ρ_1 sería, según Laplace,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_2}\right)^{1/k} \qquad (7\text{-}95)$$

Las fórmulas (7.94) y (7.95) pueden ser representadas gráficamente:



Relaciones (7–94) y (7–95) para $k = 1.4$

Figura 7.28.

Cuando la relación de presiones es vecina de la unidad, también lo es la relación de densidades y las dos curvas tienden a confundirse. No sólo son tangentes sino osculatrices. Se dice entonces que se tiene una *onda de choque débil.* En cambio, para relaciones p_2/p_1 del orden de 5, correspondientes a un número de Mach $M_1 = 2$, ya la diferencia de densidades producida por uno y otro proceso es del orden del 10%. Se dice entonces que se tiene una *onda de choque fuerte*.

La onda de choque se produce siempre a partir de un flujo supersónico que pasa a subsónico. Nunca al revés. Vamos a mostrar, en efecto, que se produce un incremento de *entropía* del fuído al ocurrir el choque.

Para un gas ideal se tiene, de acuerdo con la definición (7.15)

$$ds = \frac{dq}{\theta} = c_v \frac{d\theta}{\theta} + \frac{pdv}{\theta}$$

donde $v = \frac{1}{\rho}$ y de acuerdo con (7.32).

Por consiguiente

$$s_2 - s_1 = c_v \, ln \frac{\theta_2}{\theta_1} + R \int_1^2 \frac{d\rho}{\rho} = c_v \, ln \frac{\theta_2}{\theta_1} + R \, ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Sustituyendo θ_2/θ_1 y ρ_2/ρ_1 por sus valores en (7.88) y (7.94) y posteriormente utilizando (7.92), se obtiene

$$s_2 - s_1 = c_v \, ln \left\{ \frac{2kM_1^2 - k + 1}{k+1} \left[\frac{2 + (k-1) M_1^2}{(k+1) M_1^2} \right]^k \right\} \quad (7\text{-}96)$$

Se puede ver que esta expresión es positiva, si y sólo si,

$$M_1 > 1, \quad (7\text{-}97)$$

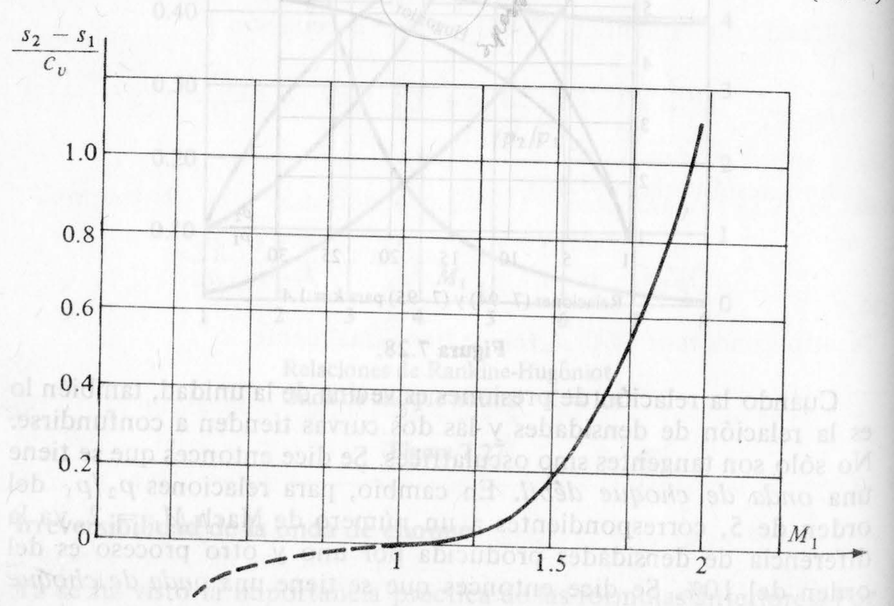


Figura 7.29.

lo cual justifica la aseveración, de acuerdo con el segundo. Principio de la Termodinámica, de que sólo se produce choque en el paso de flujo supersónico al subsónico. La variación de la antropía con el número de Mach aguas arriba M_1 dada en (7-96), puede ser representada gráficamente.

El gráfico indica claramente la rapidez con que aumenta la irreversibilidad del choque. Sin embargo también indica cómo, para choques *muy débiles*, como una onda sonora, se pueden aceptar las condiciones de isoentropía.

Características de estancamiento a través de la onda de choque

Otro aspecto interesante de lo que ocurre al producirse una onda de choque se pone de relieve al considerar las características de estancamiento que tiene el fluido antes y después de atravesar la onda.

Es fácil de ver que la temperatura de estancamiento se mantiene constante, en virtud de (7.86) :

$$\theta_{01} = \theta_{02}.$$

En cambio las presiones de estancamiento varían. Si se escribe

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_2} \, \frac{p_2}{p_1} \, \frac{p_1}{p_{01}}$$

estas relaciones se determinan rápidamente. En efecto recordando que se pasa *de un estado* del gas a las condiciones de estancamiento mediante un proceso isoentrópico, (real o hipotético), se tiene

$$\frac{p_2}{p_{02}} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_{02}}\right)^{\frac{k}{k-1}} \left[1 + \frac{U^2}{2c_p\theta_2}\right]^{-\frac{k}{k-1}} = \left[1 + \frac{k-1}{2} M_2^2\right]^{-\frac{k}{k-1}}$$

Lo mismo para p_1/p_{01}. En cambio a p_2/p_1 se tienen las relaciones (7.87) y (7.92). Se obtiene finalmente el resultado

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{\left[\frac{(k+1) M_1^2}{2 + (k-1) M_1^2}\right]^{k/k-1}}{\left[\frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1}\right]^{1/k}} \quad (7\text{-}96)$$

Esta relación ha sido representada gráficamente en la Fig. 7.27 en la

cual se ve el descenso rápido de p_{02}, debido a la irreversibilidad del choque. También aparece en las tablas, al final del capítulo.

Aplicación. Onda de choque en una tobera

Ya se han estudiado los diversos casos de flujo en una tobera convergente. Queda por analizar qué ocurre cuando la presión ambiental p_a toma valores

$$p_e < p_a = p_d < p_b$$

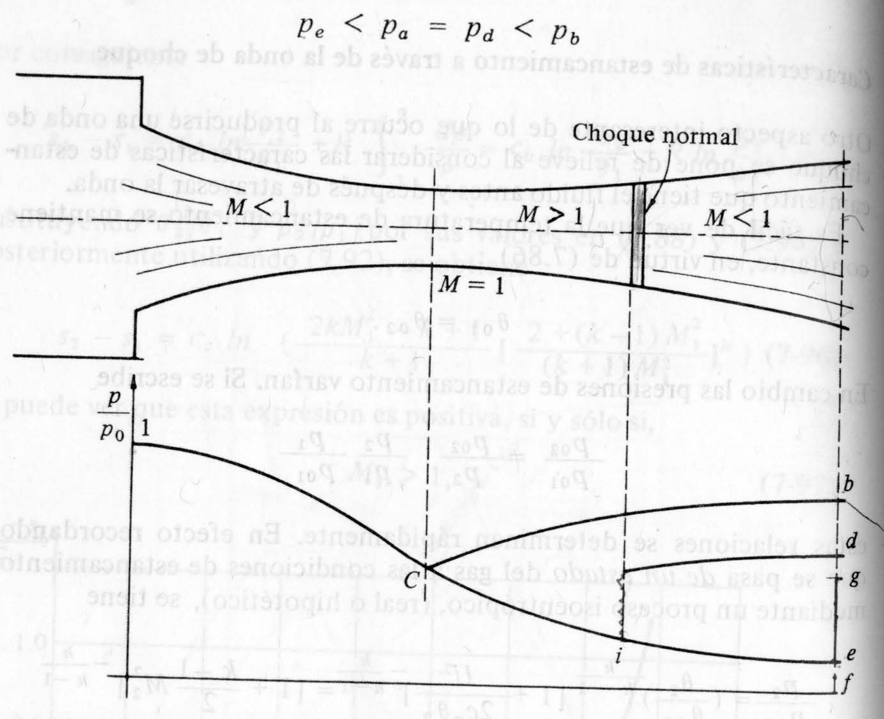


Figura 7.30.

En esa zona, y partiendo de $p_a = p_b$ se pueden presentar las siguientes situaciones. El flujo se hace supersónico aguas abajo de la garganta hasta la sección i, en la cual se produce la *onda de choque*. Después sigue subsónicamente hasta la salida donde

$$p_d = p_a$$

Si la presión p_a es disminuída, sin embargo, la sección i se va acercando a la salida de la tobera, hasta que para un cierto valor

$$p_a = p_g$$

el choque se produce en la propia boca de salida. Ello ocurre naturalmente cuando, *después del choque*, la presión alcanza justamente la presión ambiental.

Si

$$p_e < p_a < p_g$$

al chorro, supersónico, sale al ambiente con una presión *menor* que la de éste. Se dice que ésta sobre-expandido: Una serie de *ondas de*

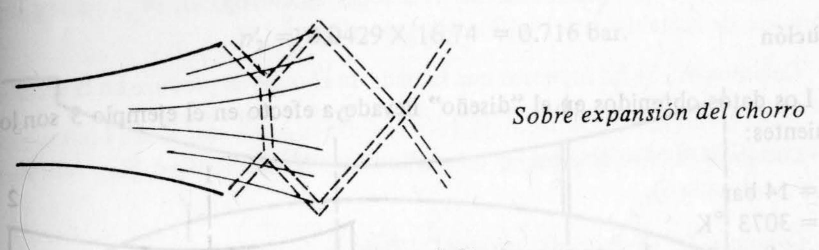


Figura 7.31.

choque oblicuas permite el paso de la presión del chorro a la salida ($p_s < p_a$) a la presión ambiental p_a.

Cuando

$$p_a = p_e$$

se tiene el caso ya contemplado de un flujo isoentrópico en toda la tobera. Al acercarse p_a al valor p_e, las ondas de choque de la sobre-expansión del chorro se han ido esfumando.

Finalmente, en el caso

$$p_a < p_e$$

también ya estudiado, se forman ondas oblicuas de expansión (a considerar más adelante), fuera de la tobera, que permiten al fluído pasar de la mayor presión del chorro supersónico a la presión ambiental.

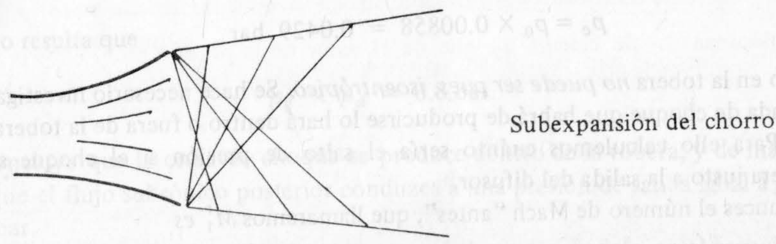


Figura 7.32.

Ejemplo 4:

El cohete considerado en el ejemplo 3 cambia de altitud y se encuentra en una región de la atmósfera donde la presión exterior es de 0.8 bar. Si para reducir el empuje, la presión de los gases es también disminuida hasta 5 bar, se pregunta:

1. Determinar si el flujo en la tobera es isoentrópico.
2. En caso negativo determinar si la onda de choque se produce fuera o dentro de la tobera. De cumplirse esta última posibilidad calcular al área de la sección en que ocurre en el choque.

Solución

1. Los datos obtenidos en el "diseño" llevado a efecto en el ejemplo 3 son los siguientes:

$p_0 = 14$ bar
$\theta_0 = 3073$ °K
$A_c = A_1 = 33\ \text{cm}^3 = 33 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$
$A_2 = 290\ \text{cm}^2 = 290 \times 10^{-4}\ \text{m}^2.$

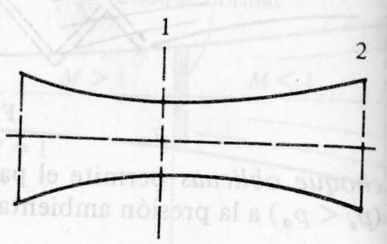


Figura 7.33.

Además se tiene ahora

$p_0 = 5$ bar y $p_a = 0.8$ bar.

Estas condiciones permiten calcular, para $k = 1.4$, y $R = 290\ \text{m}^2/\text{seg}^2$ °K la presión crítica p_c, (7.72).

$$p_c = p_0 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} = p_0 \times 0.528 = 2.64 \text{ bar.}$$

En el supuesto que el flujo fuese isoentrópico sub y supersónico, se tendrían en la salida, según se vio en el ejemplo 3, los valores

$$M_e = 3.8$$

ya que a la salida, M sólo depende de la razón de las áreas A_a/A_c, (7-83)

$$p_c = p_0 \times 0.00858 = 0.0429 \text{ bar}$$

El flujo en la tobera *no puede ser pues, isoentrópico.* Se hace necesario investigar si la onda de choque que habrá de producirse lo hará dentro o fuera de la tobera.

2. Para ello calculemos cuánto sería el salto de presión si el choque se produjera justo a la salida del difusor.

Entonces el número de Mach "antes", que llamaremos M_1' *es*

$$M_1' = M_e = 3.8$$

$$p_1' = p_e = 0.0429 \text{ bar.}$$

Por consiguiente, según (7.87) y (7.92) que han sido tabuladas

$$\frac{p_2'}{p_1'} = 16.74$$

o sea

$$p_2' = 0.0429 \times 16.74 = 0.716 \text{ bar.}$$

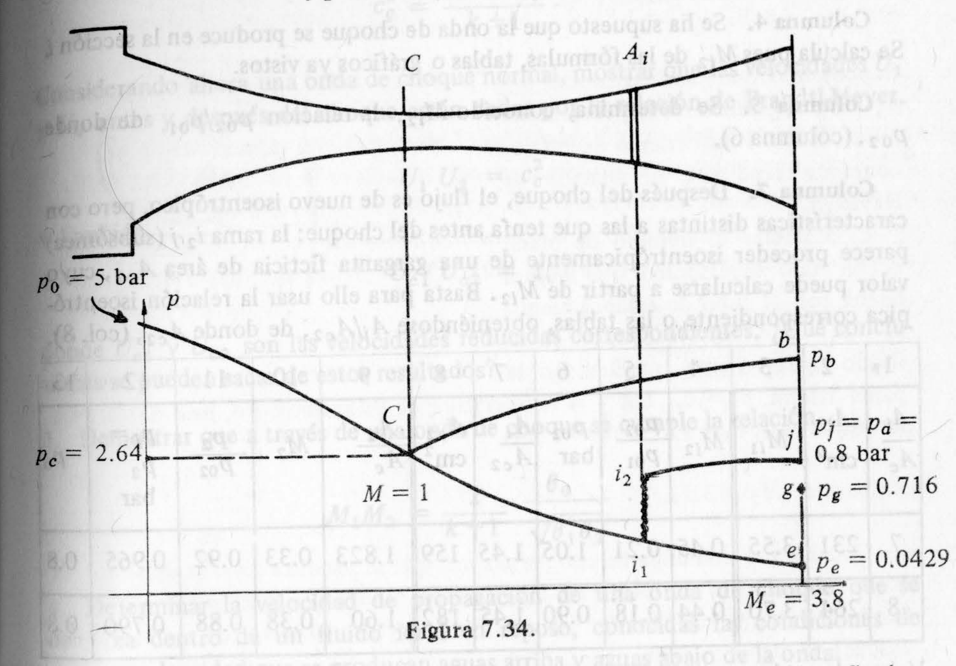


Figura 7.34.

Este valor define el punto g que representa la presión que tendría el fluido después del choque, de producirse éste en la boca del difusor, o sea que

$$p_g = 0.716 \text{ bar.}$$

Como resulta que

$$p_g < p_a = 0.8 \text{ bar.}$$

se concluye que la onda de choque se produce dentro de la tobera, y de manera tal que el flujo subsónico posterior conduzca a una presión de salida igual a $p_a =$ 0.8 bar.

Para determinar la sección en que ocurre el choque se podría, en el caso de un gas ideal, establecer una fórmula cerrada que diera A_i/A_c, siendo A_i el área de la

sección buscada. Se prefiere en general, sin embargo, proceder por un método de aproximaciones sucesivas que está resumido en la tabla adjunta y cuya justificación se da a continuación.

Columna 1. Se empieza escogiendo arbitrariamente un valor de A_i/A_c, menor al del área de salida. En el presente caso, como $A_2/A_c = 8.8$, se tomó como valor inicial de prueba, $A_i/A_c = 7$.

Columna 2. Se deduce A_i, puesto que A_c es conocido, $A_c = 33\ \text{cm}^2$.

Columna 3. Se deduce de las relaciones isoentrópicas, M_{i1}, ya sea de la fórmula, de las tablas o del gráfico correspondiente.

Columna 4. Se ha supuesto que la onda de choque se produce en la sección *i*. Se calcula pues M_{i2} de las fórmulas, tablas o gráficos ya vistos.

Columna 5. Se determina, conocido M_{i2}, la relación p_{02}/p_{01} de donde p_{02}, (columna 6).

Columna 7. Después del choque, el flujo es de nuevo isoentrópico, pero con características distintas a las que tenía antes del choque: la rama $i_2\, j$ (subsónica) parece proceder isoentrópicamente de una garganta ficticia de área A_{c2}, cuyo valor puede calcularse a partir de M_{i2}. Basta para ello usar la relación isoentrópica correspondiente o las tablas, obteniéndose A_i/A_{c2}, de donde A_{c2}, (col. 8).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{A_i}{A_c}$	A_i cm²	M_{i1}	M_{i2}	$\frac{p_{02}}{p_{01}}$	p_{02} bar	$\frac{A_i}{A_{c2}}$	A_{c2} cm²	$\frac{A_2}{A_c}$	M_2	$\frac{p_2}{p_{02}}$	$p_j = p_2$ bar	p_a
7	231	3.55	0.45	0.21	1.05	1.45	159	1.823	0.33	0.92	0.965	0.8
8	264	3.70	0.44	0.18	0.90	1.45	182	1.60	0.38	0.88	0.790	0.8

Valor adoptado $A_i = 7.9\ A_c = 7.9 \times 33 = 260\ \text{cm}^2$

Columna 9. Se calcula A_2/A_{c2} y de ese valor el número de Mach a la salida *M*, así como p_2/p_{02}, (col. 10 y 11).

Columna 12. Se calcula p_2 que da el valor de la presión en el chorro a la salida, suponiendo que el choque se haya efectivamente producido en A_i. Si

$$p_2 = p_j > p_a,$$

la onda de choque está más aguas bajo de la sección *i*, y viceversa. Ello permite escoger una nueva sección *i*, de manera tal que los sucesivos valores de p_j converjan a p_a.

Ejercicios

1. Demostrar, a partir de (7-92), las siguientes propiedades de los números de Mach antes y después de una onda de choque *normal:*

$$\text{Si } M_1 < 1, \quad M_2 > 1; \qquad \text{si } M_1 = 1, \quad M_2 = 1$$

$$\text{si } M_1 > 1, \quad M_2 < 1.$$

2. Mostrar que en el flujo isoentrópico de un gas ideal, la velocidad crítica es dada por

$$c_c^2 = \frac{2\,k\,R\,\theta_0}{k+1}.$$

Considerando ahora una onda de choque normal, mostrar que las velocidades U_1 y U_2 antes y después del choque están dadas por la relación de Prandtl-Meyer.

$$U_1\,U_2 = c_c^2$$

o también

$$U_{c1}\,U_{c2} = 1,$$

donde U_{c1} y U_{c2} son las velocidades reducidas correspondientes. ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estos resultados?

3. Demostrar que a través de una onda de choque se cumple la relación

$$M_1 M_2 = \frac{2}{k+1} \cdot \frac{\theta_0}{\sqrt{\theta_1 \theta_2}}.$$

4. Determinar la velocidad de propagación de una onda de choque que se desplaza dentro de un fluido ideal en reposo, conocidas las condiciones de presión y densidad que se producen aguas arriba y aguas abajo de la onda.

Respuesta: $$U_1^2 = \frac{p_1}{2\rho_1}\,[k - 1 + (k+1)\,\frac{p_2}{p_1}\,].$$

5. Se quiere utilizar un tubo de estancamiento para medir la velocidad de un gas ideal en movimiento:

a) Suponiendo que el flujo es subsónico, demostrar que la presión de estancamiento p_0 es dada por

$p_0, \rho_0 \theta_0$

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\,\lambda\,\rho\,U^2,$$

U

p, ρ, θ

donde

$$\lambda = [1 + \frac{M^2}{4} + \frac{2-k}{24}\,M^4 + \cdots],$$

es el llamado factor de compresibilidad. Midiendo p_0 y p por separado se obtiene entonces

$$U = \sqrt{2\,\frac{p_0 - p}{\rho\,\lambda}}$$

b) Si el flujo es supersónico, se forma una onda de choque adelante del tubo, con una zona subsónica aguas abajo. Admitiendo que en el propio eje del tubo la onda es normal, demostrar la relación de Rayleigh

$$\frac{p_0}{p_1} = \left[\frac{(k+1)^{k+1}}{2\,k\,M_1^2 - k + 1}\left(\frac{M_1^2}{2}\right)^k\right]^{\frac{1}{k-1}}$$

Suponiendo que las magnitudes p_0, p_1 y θ_0 se pueden medir, determinar la velocidad, considerando que M_1 es conocido mediante la relación de Rayleigh.

c) ¿Calcular el número de Mach de un flujo supersónico si la lectura hecha con el tubo de estancamiento es $p_0 = 1.4$ bar, la presión en el fluido aguas arriba, medida en la pared lateral, $p_1 = 0{,}1$ bar y la temperatura de estancamiento, medida con un termopar es de $\theta_0 = 175°C$; ($k = 1.4$).

Respuesta: $M_1 = 3.21$.

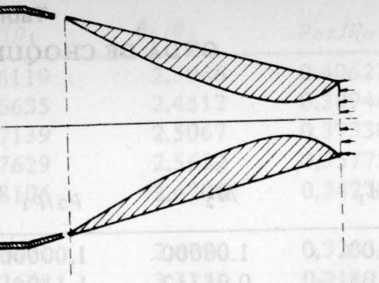
6. Considérese una onda de choque normal que se produce en el seno de un gas, no necesariamente perfecto, en movimiento. Encontrar la caída de presión a través del choque en función únicamente de las densidades y entalpías antes y después de dicho choque.

La ecuación así encontrada es útil cuando se calculan las características de una onda de choque en un gas cuyas propiedades son conocidas únicamente en forma de tablas.

Respuesta: $p_1 - p_2 = 2\,\rho_1\rho_2\,(h_1 - h_2)/(\rho_1 + \rho_2)$

7. Se considera una difusor convergente-divergente montado en un avión supersónico que vuela a $M = 1.5$ y a una altitud tal que la temperatura exterior es de $-30°C$ y la presión 0.4 bar.

a) En el supuesto que el difusor funcione isoentrópicamente, con una salida subsónica aguas abajo, determinar el área de la garganta para que se logre un caudal 50 Kg/seg. Suponiendo que el área de salida es el doble del área de entrada calcular la razón de compresión $r = \rho_2/\rho_1$ y las demás características del flujo a la



salida. Dibujar la curva de variación de la presión a lo largo del difusor.

b) Supóngase ahora que se produce un choque normal justo a la entrada del difusor, siendo el flujo isoentrópico en el resto del aparato, con salida subsónica. ¿Cuál es el valor mínimo posible del área de la garganta que permite un caudal de 50 Kg/seg ². Dibujar cualitativamente la curva de variación de la presión en este caso.

Respuesta: a) $A_c = 1590\ \text{cm}^2$, b) $r = 2.44$

8. Se quiere diseñar una tobera de Laval de sección circular para ser alimentada desde un depósito en el cual la presión es de 8 bar y la temperatura es de 250°C. Con este fin se determinará el diámetro de la garganta de manera a obtener un caudal de 30 Kg/seg de aire y el diámetro de la sección de salida, sabiendo que el flujo es totalmente isoentrópico. Calcular también la temperatura y la velocidad del chorro a la salida.

Respuesta: $D_g = 16.4$, $D_s = 21.3$, $\theta_s = 15°C$, $U_s = 341$ m/seg.

Tabla 7.4

ONDA DE CHOQUE NORMAL $k = 1.4$

M_1	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	θ_2/θ_1	p_{o2}/p_{o1}
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.05	0.95312	1.1196	1.08398	1.03284	0.99987
1.10	0.91177	1.2450	1.1691	1.06494	0.99892
1.15	0.87502	1.3762	1.2550	1.09657	0.99669
1.20	0.84217	1.5133	1.3416	1.1280	0.99280
1.25	0.82364	1.6562	1.4286	1.2594	0.98706
1.30	0.78596	1.8050	1.5157	1.1909	0.97935
1.35	0.76175	1.9596	1.6028	1.2226	0.96972
1.40	0.73971	2.1200	1.6896	1.2547	0.95819
1.45	0.71956	2.2862	1.7761	1.2872	0.94483
1.50	0.70109	2.4583	1.8621	1.3202	0.92972
1.55	0.68410	2.6363	1.9473	1.3538	0.91319
1.60	0.66844	2.8201	2.0317	1.3880	0.89520
1.65	0.65396	3.0096	2.1152	1.4228	0.87598
1.70	0.64055	3.2050	2.1977	1.4583	0.85573
1.75	0.62809	3.4062	2.2791	1.4946	0.83456
1.80	0.61650	3.6133	2.3592	1.5316	0.81268
1.85	0.60570	3.8262	2.4381	1.5694	0.79021
1.90	0.59562	4.0450	2.5157	1.6079	0.76735
1.95	0.58618	4.2696	2.5919	1.6473	0.74418
2.00	0.57735	4.5000	2.6666	1.6875	0.72088
2.05	0.56907	4.7363	2.7400	1.7286	0.69752
2.10	0.56128	4.9784	2.8119	1.7704	0.67422
2.15	0.55395	5.2262	2.8823	1.8132	0.65105
2.20	0.54706	5.4800	2.9512	1.8569	0.62812
2.25	0.54055	5.7396	3.0186	1.9014	0.60554
2.30	0.53441	6.0050	3.0846	1.9468	0.58331
2.35	0.52861	6.2762	3.1490	1.9931	0.56148
2.40	0.52312	6.5533	3.2119	2.0403	0.54015
2.45	0.51792	6.8362	3.2733	2.0885	0.51932
2.50	0.51299	7.1250	3.3333	2.1375	0.49902
2.55	0.50831	7.4196	3.3918	2.1875	0.47927
2.60	0.50387	7.7200	3.4489	2.2383	0.56012
2.65	0.49965	8.0262	3.5047	2.2901	0.44155
2.70	0.49563	8.3383	3.5590	2.3429	0.42359

M_1	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	θ_2/θ_1	p_{o2}/p_{o1}
2.75	0.49181	8.6562	3.6119	2.3966	0.40622
2.80	0.48817	8.9800	3.6635	2.4512	0.38946
2.85	0.48470	9.3096	3.7139	2.5067	0.37330
2.90	0.48138	9.6450	3.7629	2.5632	0.35773
2.95	0.47821	9.986	3.8106	2.6206	0.34275
3.00	0.47519	10.333	3.8571	2.6790	0.32834
3.50	0.45115	14.125	4.2608	3.3150	0.21295
4.00	0.43496	18.500	4.5714	4.0469	0.13876
4.50	0.42355	23.458	4.8119	4.8751	0.09170
5.00	0.41523	29.000	5.0000	5.8000	0.06172
6.00	0.40416	41.833	5.2683	7.941	0.02965
7.00	0.39736	57.000	5.4444	10.469	0.01535
8.00	0.39289	74.500	5.5652	13.387	0.00849
9.00	0.38980	94.333	5.6512	16.693	0.00496
10.00	0.38757	116.50	5.7143	20.388	0.00304
∞	0.37796	∞	6.000	∞	0

Tabla 7.5

ONDA DE CHOQUE NORMAL $k = 1.3$

M_1	M_2	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	θ_2/θ_1	p_{o2}/p_{o1}
1.00	1.0000	1.000	1.000	1.0000	1.0000
1.05	0.9530	1.116	1.088	1.0257	0.9998
1.10	0.9112	1.237	1.178	1.0507	0.9989
1.15	0.8739	1.364	1.269	1.0752	0.9966
1.20	0.8403	1.497	1.362	1.0995	0.9925
1.25	0.8100	1.636	1.456	1.124	0.9866
1.30	0.7825	1.780	1.551	1.148	0.9786
1.35	0.7575	1.930	1.646	1.172	0.9684
1.40	0.7346	2.085	1.742	1.197	0.9562
1.45	0.7136	2.246	1.838	1.222	0.9421
1.50	0.6942	2.413	1.935	1.247	0.9261
1.55	0.6764	2.585	2.031	1.273	0.9084
1.60	0.6599	2.763	2.127	1.299	0.8891
1.65	0.6446	2.947	2.223	1.326	0.8684
1.70	0.6304	3.137	2.318	1.353	0.8466
1.75	0.6172	3.332	2.413	1.380	0.8238
1.80	0.6048	3.532	2.507	1.408	0.8001
1.85	0.5933	3.738	2.601	1.437	0.7758
1.90	0.5825	3.950	2.694	1.467	0.7510
1.95	0.5724	4.168	2.785	1.497	0.7259
2.00	0.5629	4.391	2.875	1.527	0.7006
2.05	0.5539	4.620	2.964	1.558	0.6752
2.10	0.5455	4.855	3.052	1.590	0.6499
2.15	0.5376	5.095	3.139	1.623	0.6248
2.20	0.5301	5.341	3.225	1.656	0.6000
2.25	0.5230	5.592	3.309	1.690	0.5755
2.30	0.5163	5.849	3.392	1.725	0.5515
2.35	0.5100	6.112	3.474	1.760	0.5280
2.40	0.5040	6.381	3.554	1.796	0.5050
2.45	0.4983	6.655	3.633	1.832	0.4827
2.50	0.4929	6.935	3.710	1.869	0.4610
2.55	0.4878	7.220	3.786	1.907	0.4400
2.60	0.4829	7.511	3.860	1.946	0.4196
2.65	0.4782	7.808	3.933	1.985	0.3999
2.70	0.4738	8.110	4.005	2.025	0.3810
2.75	0.4696	8.418	4.075	2.066	0.3628
2.80	0.4655	8.732	4.144	2.108	0.3452
2.85	0.4616	9.052	4.211	2.150	0.3284
2.90	0.4579	9.377	4.277	2.193	0.3123
2.95	0.4544	9.708	4.341	2.236	0.2969
3.00	0.4511	10.04	4.404	2.80	0.28217
3.50	0.4241	13.72	4.964	2.763	0.16770
4.00	0.4058	17.96	5.412	3.318	0.09932
4.50	0.3927	22.76	5.768	3.946	0.05941
5.00	0.3832	28.13	6.053		0.03612
6.00	0.3704	40.57	6.469	6.271	$1244(10)^{-5}$
7.00	0.3625	55.26	6.749	8.189	$610(10)^{-5}$
8.00	0.3573	72.22	6.943	10.401	$283(10)^{-5}$
9.00	0.3536	91.43	7.084	12.908	$140(10)^{-5}$
10.00	0.3510	112.91	7.118	15.710	$740(10)^{-6}$
∞	0.3397	∞	7.667	∞	0

CAPITULO 8

Ecuaciones de Navier-Stokes y aplicaciones

8.1. Introducción

En este capítulo los mecanismos internos de deformación y movimiento en el seno de un fluido viscoso newtoniano son estudiados y utilizados. Comparado con el fluido ideal, un fluido viscoso real se distingue por la presencia inevitable de la viscosidad en todos los fenómenos de movimiento. Ello conduce, tanto analíticamente como experimentalmente a una nueva gama de propiedades, inexistentes en el caso ideal. Ellas irán apareciendo en los párrafos siguientes.

La característica más importante, sin duda, del movimiento de un fluído real es la aparición de *dos tipos de flujo* completamente distintos. En el primero, *llamado laminar,* se pueden fácilmente definir líneas de corriente, esto es, líneas envolventes del campo de las velocidades. El fluído se mueve, por así decir, en capas o láminas superpuestas que se "deslizan" unas sobre otras. Incluso cuando el flujo no es permanente, el campo de velocidades cambia de una manera "ordenada", de un instante a otro. Experimentalmente se pueden poner de relieve las líneas de corriente, mediante el arrojo de polvo de aluminio en la superficie del líquido. En el segundo tipo de flujo, *llamado turbulento,* el movimiento es completamente desordenado y aunque aparezca un movimiento principal de conjunto, por ejemplo en una tubería, las velocidades de una partícula determinada se desvían en forma irregular e imprevisible del movimiento principal.

Físicamente lo que ocurre es que, partiendo de un flujo laminar y aumentando paulatinamente su velocidad, se alcanza un estado de inestabilidad dinámica. Las partículas ya no son estables en su trayectoria, y, tal como ocurre en otros campos de la dinámica, cualquier perturbación las aparta, en forma creciente con el tiempo, de su trayectoria prevista. El parámetro que determina cuando esa condición de inestabilidad se produce se llama *número de Reynolds*, si la inestabilidad es producida por las fuerzas de viscosidad.

El camino natural para un estudio de los fluidos viscosos es pues el de estudiar primero el caso del flujo laminar, después, bajo qué condiciones se hace inestable, y finalmente el flujo turbulento cuando ya está completamente establecido.

8.2. Ecuaciones de Cauchy

El movimiento de un fluido viscoso está regido por la misma ley de Newton que rige para un sistema material cualquiera. Ya se ha visto sin embargo, para un fluido ideal, que dicha ley toma una forma particular, a saber, la ecuación de Euler.

Si el fluido puede soportar esfuerzos cortantes, como es el caso de un fluido newtoniano, la ley de Newton toma una forma ampliada, que se asocia con el nombre de Cauchy.

Para deducir estas ecuaciones se considerará un elemento de volumen como indica la figura, y todos los esfuerzos que actúan en las distintas caras.

$(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dx}{2})\, dxdz$

$(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2})\, dxdy$

$(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2})\, dydz$

$(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2})\, dydz$

$(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2})\, dxdz$

$(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2})\, dxdy$

y, z, x

Escribiendo la ley de Newton en dirección del eje x se tiene:

$$
\begin{aligned}
\rho a_x\, dxdydz = {} & dxdydz\, \rho\, G_x \\
& + (\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2})\, dydz - (\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2})\, dydz + \\
& + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2})\, dxdz - (\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2})\, dxdz + \\
& + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2})\, dxdy - (\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2})\, dxdy .
\end{aligned}
$$

Si se simplifica ahora y se divide por el volumen elemental $dx\, dy\, dz$ se obtiene la ecuación de Cauchy en la dirección $0x$. Repitiendo lo propio en las otras dos direcciones se puede, finalmente, escribir

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\rho\, a_x &= \rho\, G_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
\rho\, a_y &= \rho\, G_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
\rho\, a_z &= \rho\, G_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}
}
\qquad (8\text{-}1)
$$

Estas ecuaciones son muy generales, puesto que son simplemente la expresión de la ley de Newton, aplicada a un medio continuo.

8.3. Ecuaciones constitutivas de un fluido newtoniano

Para poder aplicar las ecuaciones de Cauchy a un fluido viscoso newtoniano, hace falta conocer la relación que liga los esfuerzos a las velocidades de deformación tal como han sido definidas en (3.55). Estas ecuaciones constitutivas son equivalente para un fluido de lo que es la ley de Hooke (generalizada) para un sólido elástico. Se hizo alusión a ellas en el capítulo 1, al discutir el comportamiento de los distintos materiales.

Resulta muy ilustrativo partir del caso de un sólido elástico y ver cómo ha de cambiar la ecuación constitutiva para que refleje las propiedades de un fluido.

La *ley de Hooke generalizada* puede escribirse con las notaciones adoptadas en este texto como:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{8-2}$$

$$\tau_{xy} = 2G\ \gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = 2G\ \gamma_{yz} \tag{8-3}$$

$$\tau_{zx} = 2G\ \gamma_{zx}$$

En estas expresiones, que son, en esencia, una generalización de resultados experimentales, se encuentra despejada la deformación en términos de las σ_{zz}, σ_{yy}, σ_{xy}, ... Se puede tratar de hacer a la inversa, despejando de ellas los esfuerzos, cosa que se deja como ejercicio. El resultado es que se puede escribir:

$$\sigma_{xx} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + \frac{E}{1+\mu}\epsilon_{xx}$$

y las correspondientes a los otros ejes.

Si se llama

$$\Theta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}, \tag{8-4}$$

$$2G = \frac{E}{1+\mu}, \qquad \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \tag{8-5}$$

se tiene la ley de Hooke para un cuerpo elástico, como

$$\sigma_{xx} = \lambda\,\Theta + 2G\,\epsilon_{xx},$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\,\Theta + 2G\,\epsilon_{yy},$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\,\Theta + 2G\,\epsilon_{zz}, \tag{8-6}$$

conjuntamente con (8.3).

Llegados aquí, se puede ahora empezar a hablar del caso de un fluido newtoniano. El comportamiento de éste es parecido al de un sólido elástico en el sentido que ambos son cuerpos lineales, es decir, regidos por ecuaciones lineales entre esfuerzos y deformaciones. Difieren según sabemos, en que en un fluido, lo que genera esfuerzos cortantes, no es la deformación γ_{xy} sino la *velocidad* de la deformación $\dot{\epsilon}_{xy}$. Además en un fluido en reposo hay un esfuerzo interno uniforme alrededor de un punto, a saber la presión. Las *ecuaciones constitutivas* que toman en cuenta todas estas propiedades físicas del fluido viscoso se escriben entonces:

$$\sigma_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\,\dot{\Theta} + 2\mu\,\dot{\epsilon}_{xx},$$

$$\sigma_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\,\dot{\Theta} + 2\mu\,\dot{\epsilon}_{yy}, \tag{8-7}$$

$$\sigma_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\,\dot{\Theta} + 2\mu\,\dot{\epsilon}_{zz},$$

$$\tau_{xy} = 2\mu\,\dot{\epsilon}_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{yz} = 2\mu\,\dot{\epsilon}_{yz}, \tag{8-8}$$

$$\tau_{zx} = 2\mu\,\dot{\epsilon}_{zx}.$$

Conviene mencionar algunas propiedades implícitas en estas ecuaciones. Si se suman los esfuerzos normales se tiene

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3p - 2\mu\,\dot{\Theta} + 2\mu\,\dot{\Theta},$$

o sea

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}, \tag{8-9}$$

esto es, la presión es el promedio de los esfuerzos normales.

También se observa que si el fluido es incompresible, el término

$$\dot{\Theta} = \dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz} = \nabla \cdot \overline{u} = 0, \tag{8-10}$$

por lo cual las ecuaciones constitutivas se simplifican en este caso.

8.4. Ecuaciones de Navier-Stokes

Si las relaciones esfuerzo-velocidad de deformación del fluido viscoso, (8-7,8), se llevan a las ecuaciones de Cauchy, (8-1), se obtienen

las ecuaciones dinámicas de dicho fluido.

Para ello hay que calcular

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}\right),$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}\right),$$

y llevando estos valores en (8.1),

$$\rho\, a_x = \rho\, G_x - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} +$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2},$$

o sea

$$\rho\, a_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho\, G_x + \mu\nabla^2 u_x + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial x},$$

que es la ecuación de Navier-Stokes sobre el eje $0x$.

Haciendo lo mismo para los otros ejes, se obtienen finalmente

$$a_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + G_x + \nu\nabla^2 u_x + \frac{1}{3}\nu\cdot\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial x},$$

$$a_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + G_y + \nu\nabla^2 u_y + \frac{1}{3}\nu\cdot\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial y},$$

$$a_z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + G_z + \nu\nabla^2 u_z + \frac{1}{3}\nu\frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial z}. \qquad (8\text{-}11)$$

ecuaciones que se pueden agrupar en una sola ecuación vectorial, la ecuación de Navier-Stokes

$$\bar{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \bar{G} + \nu\nabla^2\bar{u} + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla\cdot\bar{u}). \qquad (8\text{-}12)$$

Estas ecuaciones, rigen el movimiento de todo fluido viscoso (newtoniano).

Si el fluido es incompresible, esto es, en el caso de los líquidos, se tiene

$$\bar{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \bar{G} + \nu\nabla^2\bar{u}, \qquad (8\text{-}13)$$

y si el fluído no es viscoso, compresible o no, se tiene

$$\bar{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \bar{G}, \qquad (8\text{-}14)$$

la ecuación de Euler, como era de esperarse.

Una última observación. Si el fluído está en reposo, ya sea viscoso o no, compresible o no, se obtiene

$$0 = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \bar{G}. \qquad (8\text{-}15)$$

Ello permite concluir que las leyes de la estática de los fluídos, planteadas como en (2.5), son independientes de la viscosidad y de la compresibilidad, con lo cual queda demostrada la aseveración hecha en el cap. 2, pág. 1.

8.5 Soluciones exactas en flujo viscoso

Como primeras aplicaciones se va a estudiar el flujo de un fluido viscoso en casos muy sencillos en los que las ecuaciones de Navier-Stokes son exactamente integrables. Para ello se supondrá que el fluído es suficientemente lento para ser laminar y estable, dejando el difícil problema de la turbulancia para más adelante.

Se tomarán varios ejemplos para mostrar las grandes posibilidades de estudio y predicción que ofrecen las ecuaciones de Navier-Stokes.

8.5-a Flujo plano entre láminas paralelas (Poiseuille)

Sean dos láminas planas paralelas, colocadas horizontalmente, entre las cuales ha de fluir un líquido viscoso de densidad ρ y viscosidad μ. Las placas se suponen infinitas y se supone que existe un gradiente de presión no nulo que mantiene el líquido en flujo permanente. Además, suponien-

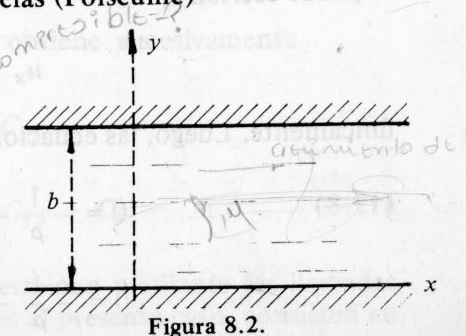


Figura 8.2.

do el flujo laminar, se postula que el fluido se mueve paralelamente a las dos láminas, de manera que

$$u_x = u_x(x, y), \tag{8-16}$$

a lo sumo, y

$$u_y = 0, \qquad u_z = 0.$$

Las ecuaciones (8-11) se escriben pues en este caso

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + G_x + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right),$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + G_y,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + G_z.$$

Todavía el problema admite otras simplificaciones. En efecto

$$G_x = 0, \qquad G_y = -g, \qquad G_z = 0$$

y como la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

resulta en este caso

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

se puede escribir

$$u_x = u_x(y), \tag{8-17}$$

únicamente. Luego, las ecuaciones del movimiento son

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{d^2 u_x}{dy^2},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g, \tag{8-18}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{8-18}$$

La última de estas ecuaciones indica que p no es función de z. La segunda es la misma ecuación de la hidroestática: Se concluye de ella que la variación de presión en la dirección y es la misma que si el fluido estuviera en reposo.

Las ecuaciones anteriores permiten demostrar además que $\frac{\partial p}{\partial x}$ es una constante. En efecto derívese cada una de ellas con respecto a x. Se tiene

$$0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right),$$

$$0 = \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

Luego $\frac{\partial p}{\partial x}$ no depende ni de x, ni de y, ni de z, como se quería demostrar.

Se puede escribir que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -K, \tag{8-19}$$

siendo K una constante positiva. El signo menos indica que la presión disminuye al aumentar K, como quedará probado más adelante.

Por las razones expuestas se considera ahora la ecuación (8.18).

$$\frac{d^2 u_x}{dy^2} = -\frac{K}{\mu}. \tag{8-20}$$

Esta ecuación puede ser integrada y se obtiene sucesivamente

$$\frac{du_x}{dy} = -\frac{K}{\mu}y + C_1,$$

$$u_x = -\frac{K}{2\mu}y^2 + C_1 y + C_2 \tag{8-21}$$

Las constantes de integración se determinan mediante las llamadas *condiciones de contorno,* las cuales en el presente caso, consisten en

decir que, para un *fluido viscoso*, la velocidad de las partículas de fluido en contacto con la pared es nula. Este es un hecho fundamental, característico de todo fluido voscoso en contacto con una pared sólida: el fluido tiene la velocidad de la pared, en el presente caso nula. Esta condición es llamada la condición de *no deslizamiento*.

Las condiciones de contorno de este problema se pueden pues expresar por

$$y = 0, \qquad u_x = 0,$$

$$y = b, \qquad u_x = 0.$$

Entonces se obtienen, de (8.21), las ecuaciones

$$0 = C_2$$

$$0 = -\frac{K}{2\mu} b^2 + C_1 b,$$

de donde

$$C_1 = \frac{Kb}{2\mu}, \qquad C_2 = 0,$$

La distribución de velocidades es dada entonces, por

$$u_x = \frac{K}{2\mu}(by - y^2). \tag{8-22}$$

Esta es la distribución de velocidades buscada.

Se trata de una distribución parabólica, y el caudal se determina fácilmente:

$$\dot{V} = \int_0^b u_x\, dy = \frac{K}{2\mu}\int_0^b (by - y^2)\, dy$$

$$= \frac{K}{2\mu}\left[b\,\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{Kb^3}{2\mu}\,\frac{1}{6} = \frac{Kb^3}{12\mu}. \tag{8-23}$$

Se observa que da un caudal positivo, como ha de ser, siempre que $K > 0$. Esto demuestra que efectivamente,

$$\frac{\partial p}{\partial x} < 0. \tag{8-24}$$

La solución (8.22), que es una *solución exacta* de las ecuaciones de Navier-Stokes, permite encontrar todas las características del flujo considerado que uno desee.

Por ejemplo, la distribución de esfuezos cortantes sería dada por (8.3),

$$\tau = \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \mu\,\frac{du_x}{dy}$$

$$= \frac{K}{2}(b - 2y). \tag{8-25}$$

El valor máximo del esfuerzo cortante se produce en la pared y es nulo en el centro.

$$\tau_{max} = \frac{Kb}{2} \tag{8-26}$$

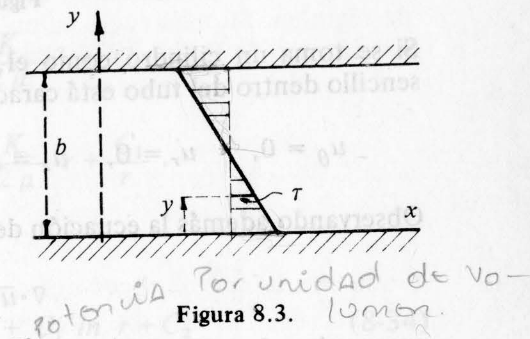


Figura 8.3.

Una propiedad muy importante de los fluidos viscosos es la disipación constante de energía. En (1-19) se encontró una expresión particular, pero válida en el presente caso, para evaluar la energía mecánica disipada en calor. Su valor sería:

$$\dot{W} = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

$$= \frac{k}{4\mu}(b - 2y)^2; \tag{8-27}$$

esto representa una potencia por unidad de volumen.

8.5-b Flujo en un cilindro

Para estudiar el flujo en un cilindro es conveniente escribir las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas. Partiendo de (8.12), la componente según el eje del cilindro se escribe, en general

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\,\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\,\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\,\frac{\partial u_z}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + G_z + \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right], \quad (8\text{-}28)$$

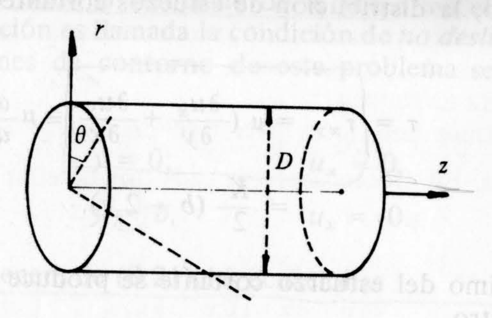


Figura 8.4.

Si se toma un cilindro como el indicado en la figura, el flujo más sencillo dentro del tubo está caracterizado por

$$u_\theta = 0, \quad u_r = 0, \quad u_z = u_z\ (r, z, t), \quad G_z = 0. \quad (8\text{-}29)$$

Observando además la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0$$

en coordenadas cilíndricas (Secc. 3.4, Ejerc. 6)

$$\frac{\partial\ (ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial\ (ru_z)}{\partial z} = 0$$

se concluye que

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (8\text{-}30)$$

esto es que u_z no depende de z. Luego $u_z = u_z(r)$ es únicamente función del radio r, si además se ha impuesto un flujo permanente. La ecuación (8.28) se simplifica notablemente en este caso obteniéndose

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right). \quad (8\text{-}31)$$

Como en los casos anteriores, es fácil demostrar que

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -K, \quad (8\text{-}32)$$

donde K es una constante.

La ecuación (8.31) se escribe pues, recordando que u_z es función sólo de r,

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_z}{dr}\right) = -\frac{K}{\mu}\ r\ ; \quad (8\text{-}33)$$

integrando y simplificando, se tiene sucesivamente

$$r\ \frac{du_z}{dr} = -\frac{K}{2\,\mu}\ r^2 + C_1,$$

$$\frac{du_z}{dr} = -\frac{K}{2\,\mu}\ r + \frac{C_1}{r},$$

de donde, integrando de nuevo

$$u_z = -\frac{K}{4\,\mu}\ r^2 + C_1\ ln\ r + C_2 \quad (8\text{-}34)$$

Esta es la ley de distribución de velocidades en el seno del fluido, sujeta naturalmente, a las condiciones de contorno del problema propuesto. Estas son para la velocidad

$$u_z = 0 \quad \text{para} \quad r = R,$$

$$u_z \ \text{finito}, \ \text{para} \quad r = 0. \quad (8\text{-}35)$$

De la segunda condición, se concluye inmediatamente que

$$C_1 = 0, \quad (8\text{-}36)$$

y de la primera

$$u_z = 0 = -\frac{K}{4\,\mu}\ R^2 + C_2\ ,$$

de donde

$$C_2 = \frac{K}{4\,\mu}\ R^2. \quad (8\text{-}37)$$

Por consiguiente, la distribución de velocidades de un tubo cilíndrico es dada por

$$u_z = \frac{K}{4\mu}\,[R^2 - r^2]. \qquad (8\text{-}38)$$

Este resultado pudo haberse obtenido más directamente (Ejercicio 6). El propósito de esta deducción es mostrar cómo las ecuaciones de Navier-Stokes permiten la solución completa de cualquier problema "integrable" de la mecánica de los fluidos.

Ahora se estudiarán, a partir de (8-38) algunas propiedades del flujo en un cilindro.

La primera observación, es que las condiciones (8-29) implican un flujo estrictamente laminar. La ecuación (8-38) es cierta, en este tipo de régimen. Su existencia en un cilindro dado dependerá físicamente del número de Reynolds del flujo.

El caudal y la velocidad media son de interés. Se tendrá

$$\dot V = \int_0^R u_z\, 2\pi r\, dr = \frac{K}{4\mu}\int_0^R (R^2 - r^2)\, 2\pi r\, dr$$

$$= \frac{\pi K}{2\mu}\int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr = \frac{\pi K}{2\mu}\left[R^2\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$\dot V = \frac{\pi K}{2\mu}\,\frac{R^4}{4} = \frac{\pi K}{8\mu}R^4. \qquad (8\text{-}39)$$

Esta es la llamada fórmula de Poiseuille.

La velocidad media es, entonces,

$$U_m = \frac{\dot V}{\pi R^2} = \frac{K R^2}{8\mu}. \qquad (8\text{-}40)$$

Un aspecto importante del flujo de un fluido en una tubería es la evaluación de la *pérdida de presión* a lo largo de ella debido a los efectos viscosos.

En la fórmula anterior se deduce, recordando (8.32).

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{p_1 - p_2}{L} = K = \frac{8U_m\mu}{R^2} = \frac{32\,U_m\mu}{D^2}. \qquad (8\text{-}41)$$

donde

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = K = \frac{\Delta p}{L}$$

es la pérdida de presión por unidad de longitud a lo largo del tubo.

En los problemas técnicos muchas veces se expresa la pérdida de presión por la "pérdida de carga", definiéndose esta último concepto como, (4-46),

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} \qquad (8\text{-}42)$$

En términos de h_f la relación (8-41) se escribe sucesivamente

$$h_f = \frac{32\,U_m\,\mu\,L}{\gamma\,D^2} = \frac{32\,\mu\,L\,U_m^2}{\rho g\,D^2\,U_m}$$

$$= \frac{\mu/\rho}{U_m D}\;64\;\frac{L}{D}\;\frac{U_m^2}{2g}$$

esto es, llamando número de Reynolds Re, a

$$R_e = \frac{U_m D}{\nu}, \qquad (8\text{-}43)$$

se tiene

$$h_f = \frac{64}{R_e}\cdot\frac{L}{D}\cdot\frac{U_m^2}{2g}. \qquad (8\text{-}44)$$

Esta es la fórmula que da la pérdida de carga en una tubería en flujo laminar. Se verá más adelante que, en el caso de flujo turbulento, la pérdida de carga es dada por una fórmula parecida en la que sólo el coeficiente $\frac{64}{R_e}$ cambia.

Si se llama el coeficiente

$$f = \frac{64}{R_e}, \qquad (8\text{-}45)$$

"coeficiente de fricción", se pude escribir la fórmula de *Darcy-Weisbach*

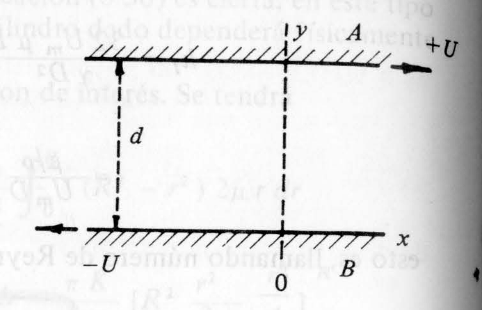
$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U_m^2}{2g} \qquad (8\text{-}46)$$

en la cual f es dada por (8.45) si el *flujo es laminar*. En el caso de *flujo turbulento* se verá más adelante que la misma relación (8.46) sigue siendo válida siempre que el coeficiente f se evalue adecuadamente.

Ejercicios

1. Sean dos placas paralelas infinitamente largas A y B, separadas por una distancia d. Entre las placas existe un fluido de viscosidad μ que está sometido a un gradiente de presión constante

$$K = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

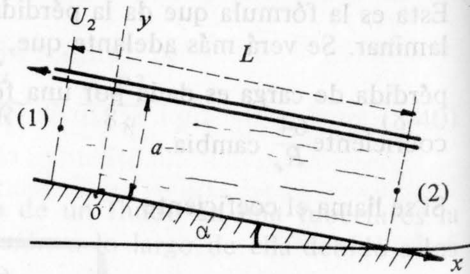


La placa A se mueve con una velocidad constante $+U$ y la placa B con una velocidad constante $-U$. Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes, obtenga la distribución de velocidad $u = u(y)$ y el caudal que fluye entre las placas.

Respuesta: $u = \frac{Kd}{2\mu} y (1 - \frac{y}{d}) + U (2\frac{y}{d} - 1)$; $\dot{V} = \frac{Kd^3}{12\mu}$

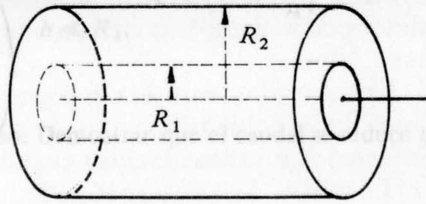
2. Un líquido viscoso fluye entre dos superficies planas paralelas en la forma indicada. La lámina superior se mueve hacia arriba con velocidad U. Partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes, encontrar la distribución de velocidades, la distribución de vorticidad, y el esfuerzo cortante en la lámina superior, cuando entre los puntos 1 y 2, la diferencia de presión es dada:

$$p_1 - p_2 = \Delta p.$$



Respuesta: $u = \frac{1}{2\mu} (\frac{\Delta p}{L} + \rho g \text{ sen } \alpha)(y^2 + ay) - \frac{Uy}{a}$; $\tau = \frac{a}{2} (\frac{\Delta p}{L} + \rho g \text{ sen } \alpha) - \frac{\mu U}{a}$

3. A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes escritas en coordenadas cilíndricas, demostrar que el fluido longitudinal laminar sobre dos cilindros concéntricos es dado por



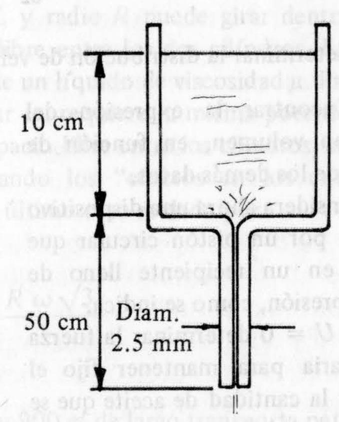
$$u = \frac{1}{4\mu} K \left(R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{ln(R_1/R_2)} \, ln \frac{R_2}{r}\right)$$

con

$$K = -\frac{dp}{dx}.$$

4. Un tipo común de viscosímetro para líquidos consiste en un depósito relativamente grande con un tubo de descarga largo y muy estrecho. Si el líquido es aceite de densidad constante y el caudal con que se vacía es de 15 cm³ por minuto, ¿cuál es la viscosidad cinemática del fluido? Se supondrá flujo laminar permanente.

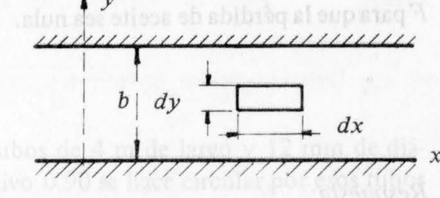
Respuesta: 4.5×10^{-5} m²/seg.



5. Plantear la ecuación diferencial del flujo de Poiseuille plano, partiendo de la consideración directa de las fuerzas que actúan sobre un elemento de volumen rectangular, en el caso de un flujo laminar. Encontrar la distribución de velocidades si

$b = 2$ cm; $K = 3$ bar/m.

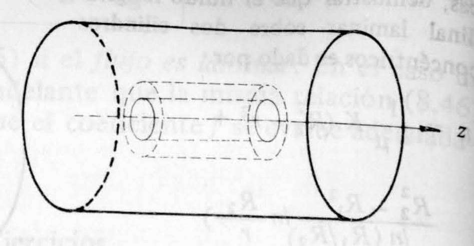
sabiendo que se trata de agua a 20°C.



6. Dado un tubo cilíndrico por el cual circula un fluido en flujo laminar se considera un elemento de volumen en forma de anillo, como se muestra en el dibujo. Considerando las fuerzas que actúan sobre este elemento, y aplicando la ley

de Newton, deducir directamente la distribución de velocidades

$$u_z = \frac{k}{4\,\mu}\,(R^2 - r^2).$$



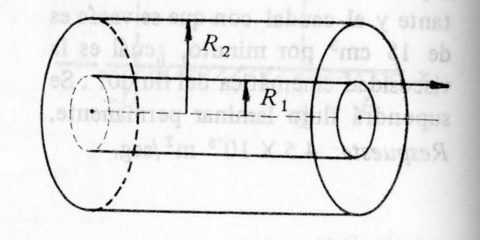
7. Se dan dos cilindros cirulares concéntricos de radios R_1 y R_2 entre los cuales círcula un líquido viscoso de densidad ρ y viscosidad μ.

a) Si el cilindro interior se mueve con una velocidad U_0 y si el fluido está sometido a un gradiente de presión

$$\frac{\partial p}{\partial z} = K$$

se pide determinar la distribución de velocidades en el fluido.

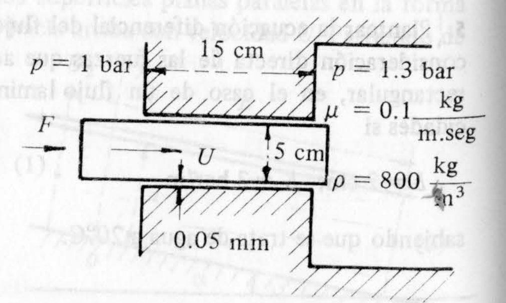
b) Encontrar la expresión del caudal en volumen, en función de U_0, K y de los demás datos.



Se considera ahora una dispositivo formado por un pistón circular que penetra en un recipiente lleno de aceite a presión, como se indica.

c) Si $U = 0$ determinar la fuerza F necesaria para mantener fijo el pistón, y la cantidad de aceite que se pierde por unidad de tiempo.

d) Si el pistón penetra en el recipiente con una velocidad U, determinar cuánto han de valer U y F para que la pérdida de aceite sea nula.



Respuesta:

$$\dot V = \frac{K\pi}{8\,\mu}\left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right] + \pi\,U_0\left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2\ln R_2/R_1} - R_1^2\right]$$

8. Se dan dos cilindros coaxiales cuyos radios difieren en una cantidad muy pequeña

$$R_2 = R_1 + b. \qquad b \ll R_1.$$

y entre los cuales fluye un líquido viscoso. Demostrar que el caudal se reduce a la expresión

$$\dot V = \frac{K\pi\,R_1\,b^3}{6\,\mu}.$$

¿Cómo podía predecirse este resultado?

9. Un tambor cilíndrico de longitud L y radio R puede girar dentro de un cilindro fijo coaxial con él. El espacio libre entre los dos cilíndros, b, es muy pequeño comparado con R y está lleno de un líquido de viscosidad μ. Para hacer girar el tambor con una velocidad angular ω, requiere la misma potencia que el bombear el líquido axialmente por el espacio libre entre los cilindros, cuando el tambor está sin movimiento. Despreciando los "efectos en los extremos", mostrar que la diferencia de presión en el último caso es dada por

$$\Delta P = \frac{2\,\mu\,L\,R\,\omega\,\sqrt{3}}{b^2}$$

10. Una tubería de 75 mm de diámetro y 900 m de largo transporta petróleo de peso específico relativo 0.86 y de viscosidad cinemática 0.00033 m^2/seg, a razón de 40000 Kg/hora. Verificar que el flujo es laminar y determinar la potencia absorbida para vencer la fricción de la tubería.

Respuesta: 54.8 Kw.

11. Un enfriador de aceite consiste de tubos de 4 m de largo y 12 mm de diámetro. Un aceite de peso específico relativo 0.90 se hace circular por esos tubos a la velocidad de 1.8 m/seg. Si la temperatura de entrada es de 60°C y la de salida 20°C, y admitiendo que se puede considerar que la viscosidad varía como función lineal de la longitud atravesada, determínese la potencia necesaria para forzar el flujo a través de un grupo de 200 tubos.

Respuesta: 3.65 Kw.

8.6 Parámetros adimensionales

Se ha visto en los ejemplos anteriores cómo la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes permite, cuando ella es posible, la descripción completa del movimiento de un fluido viscoso en régimen laminar.

Desgraciadamente esa integración sólo es posible en un número muy limitado de problemas. Vamos a ver aquí que las ecuaciones dan información valiosa incluso cuando no son integrables.

Tómese la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible, sobre el eje $0y$.

$$a_y = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla^2 u_y - g. \quad (8\text{-}47)$$

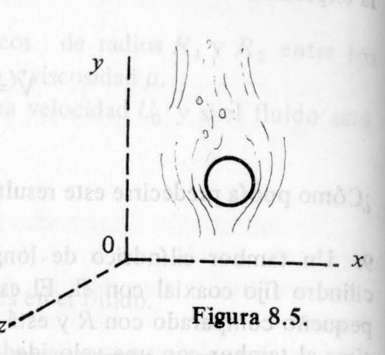


Figura 8.5.

Dado un problema físico cualquiera habrán de existir ciertas magnitudes características que se pueden tomar como referencia. Por ejemplo si se trata de la caída de una esfera en el fluido, el diámetro D de la esfera y la presión p_0 en el punto de estancamiento de la esfera, son magnitudes características de ese problema. En general, supongamos que, en un caso dado, se pueden encontrar las magnitudes características l_0, u_0, p_0, que son una longitud, una velocidad y una presión, respectivamente. Estas se tomarán como valores de referencia, es decir, que comparándolas con otras longitudes x, y, z otras velocidades u_x, u_y, u_z, y otras presiones p, también asociadas al problema se podrán definir magnitudes adimensionales de "longitud", "velocidad" y "presión" de la siguiente manera:

$$x^* = \frac{x}{l_0}, \quad y^* = \frac{y}{l_0}, \quad z^* = \frac{z}{l_0}$$

$$u_x^* = \frac{u_x}{u_0}, \quad u_y^* = \frac{u_y}{u_0}, \quad u_z^* = \frac{u_z}{u_0}$$

$$p^* = \frac{p}{p_0} \quad (8\text{-}48)$$

El propósito de esta sección es de escribir las ecuaciones de Navier-Stokes en términos de esas cantidades adimensionales.

Para ello, conviene expresar también en forma adimensional, magnitudes como el tiempo t o la aceleración a_x, a_y, a_z.

Si se define un valor de referencia para el tiempo según

$$t_0 = \frac{l_0}{u_0},$$

se tiene un "tiempo" adimensional según

$$t^* = \frac{t}{t_0} = \frac{l_0}{u_0}\, t$$

y, asimismo, si

$$a_0 = \frac{u_0}{t_0} = \frac{u_0^2}{l_0}$$

se define

$$a^* = \frac{a}{a_0} = a\frac{l_0}{u_0^2}.$$

Volviendo ahora a la ecuación de Navier-Stokes, ésta se puede escribir, utilizando las cantidades adimensionales

$$\frac{u_0^2}{l_0}\, a^*{}_y = \frac{1}{\rho}\frac{p_0}{l_0}\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \nu\,\frac{u_0}{l_0^2}\left(\frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u_y^*}{\partial z^{*2}}\right) - g$$

es decir, dividiendo por $\frac{u_0^2}{l}$ y simplificando,

$$a_y^* = \frac{1}{\rho}\frac{p_0}{u_0^2}\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\nu}{u_0 l_0}\nabla^2 u^*{}_y - \frac{g\, l_0}{u_0^2} \quad (8\text{-}49)$$

Esta es la *ecuación de Navier-Stokes en forma adimensional*; es de observar que los coeficientes

$$\frac{p_0}{\rho u_0^2}, \quad \frac{\nu}{u_0 l_0}, \quad \frac{g\, l_0}{u_0^2}$$

que aparecen en ella son también adimensionales y están escritos en términos de las magnitudes características del problema en estudio y de tres constantes físicas. Cada uno de esos coeficiente juega un

papel importante en el movimiento de los fluidos. Se les han dado las siguientes nombres:

$$E = \frac{p_0}{\frac{1}{2}\rho u_0^2} \qquad \textit{número de Euler}$$

$$R_e = \frac{u_0 l_0}{\nu} \qquad \textit{número de Reynolds} \tag{8-50}$$

$$F = \frac{u_0}{\sqrt{g\, l_0}} \qquad \textit{número de Froude}$$

Estas cantidades adimensionales, o *parámetros* del flujo, como se les llama también, regulan la relativa importancia de los distintos términos de la ecuación de Navier-Stokes.
Esta última. en efecto. se escribe, de (8-47)

$$a_y^* = -\frac{1}{2}\, E\, \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{R_e}\nabla^2 u_z - \frac{1}{F^2} \tag{8-51}$$

y se ve, por ejemplo que para un flujo con un alto número de Reynolds, el término $\nabla^2 u_y$ puede llegar a ser despreciable frente a los otros.

Las aplicaciones e implicaciones de los parámetros adimensionales E, R_e, F son múltiples, y se irán presentando en los capítulos siguientes.

Cabe mencionar también que éstos no son los únicos parámetros que se presentan. Si se toma en cuenta la compresibilidad del fluido y los fenómenos de cambio de temperatura, una nueva serie de cantidades adimensionales característicos del flujo aparece.

CAPITULO 9

Análisis dimensional y similitud

9.1 Introducción

Después de varios siglos de investigación matemática, la mecánica de los fluidos sigue siendo una *ciencia experimental.* Ello es debido a que las ecuaciones dinámicas que rigen el movimiento de un fluido no son lineales, como ya se ha indicado anteriormente, y por consiguiente no pueden ser integradas casi en ningún caso. Esta dificultad complicada por la inestabilidad del movimiento, que conduce a la turbulencia, ha obligado a completar los resultados insuficientes del cálculo mediante mediciones obtenidas directamente de la naturaleza, o sobre "modelos". Así pues, dado un problema, se procura reproducirlo exactamente en el laboratorio, en tamaño natural o a escala, y entonces observar el movimiento, midiendo directamente las velocidades, presiones, etc., en los puntos de interés.

El querer observar una serie de magnitudes y hacer modelos a escala de fenómenos naturales trae a su vez una serie de dificultades que han obligado a una metodología especial, objeto de este capítulo.

9.2 Análisis dimensional

Una de las técnicas más empleadas para el propósito antes indicado es el llamado análisis dimensional, método que no es particular a la

mecánica de los fluidos, pero que, por las razones ya aludidas, cobra especial significación en ese campo.

Parámetros adimensionales. Para comprender el significado y el alcance del análisis dimensional nos referimos a los resultados de la sección 8.6. Allí se vió cómo un fenómeno físico, representado por una o varias ecuaciones diferenciales, está regido, en el fondo por varios parámetros adimensionales, formados por las distintas magnitudes físicas que lo determinan. Sucede que los parámetros adimensionales aludidos intervienen en todo movimiento, aunque no se conozca las ecuaciones diferenciales que lo rigen y mucho menos las soluciones. Y, justamente el análisis dimensional tiene por objeto *poner de manifiesto* esos parámetros cuando las soluciones analíticas no se pueden alcanzar. Dicho de otra manera, se trata de hacer un estudio de las *restricciones* impuestas a una función, arbitraria a priori, mediante el requisito de que sea dimensionalmente homogénea, esto es, físicamente aceptable. Por otra parte, el análisis dimensional sólo, no arrojará la "función" *solución* del problema buscado y será necesario encontrarla experimentalmente o por otros medios. La utilización de los resultados del análisis dimensional, sin embargo orientará la posterior investigación experimental de manera insustituible.

Dimensiones de una magnitud física

Empecemos pues recordando que cualquier *magnitud física* se puede referir dimensionalmente a un conjunto reducido de magnitudes fundamentales. Restringiéndonos por el momento el campo de las magnitudes mecánicas, las magnitudes fundamentales que escogeremos son longitud L, masa M y tiempo T.

Las magnitudes derivadas tienen dimensiones que se expresan en términos de ésas. Así por ejemplo

Trabajo: $[W] = L^2 M T^{-2}$

Viscosidad: $[\mu] = L^{-1} M T^{-1}$

Detalles de estos cálculos fueron dados en el Capítulo 1, y aquí se supondrán sabidos.

Dependencia funcional. Ahora bien, en un problema de mecánica de los fluidos buscaremos simpre expresar la solución mediante una o varias magnitudes desconocidas en función de otras conocidas, esto es, en general, soluciones del tipo

$$u_1 = f_1 (x_1\, x_2, \cdots x_n), \tag{9-1}$$

$$u_2 = f_2 (x_1, x_2, \cdots x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

donde las x_i pueden ser las coordenadas, la temperatura, densidad, etc. y las u_i, por ejemplo, las componentes de la velocidad, la presión, etc.

Así *por ejemplo*, las ecuaciones (8-38)

$$u = \frac{K}{4\mu}(R^2 - r^2),$$

y (8-41)

$$\Delta p = \frac{32\,\mu\, L\, U_m}{D^2}, \tag{9-2}$$

dan la distribución de velocidades y la pérdida de presión en una tubería circular en flujo laminar.

Otro ejemplo, en el cual no se da la forma de la función, se obtiene al escribir que el aumento de carga H que produce una bomba centrífuga, es función del caudal Q, la velocidad angular N de la bomba, el diámetro de la bomba D, de la densidad ρ del fluido, del módulo de compresibilidad de fluido E_θ, de la viscosidad μ, de la rugosidad ϵ de los álabes, y de la aceleración de gravedad g, esto es

$$H = f(Q, N, D, \rho, E_\theta, \mu, \epsilon, g), \tag{9-3}$$

aun cuando dicha dependencia funcional no se conozca, ni se pueda esperar conocer analíticamente.

Volviendo a (9.1) y a la luz de los ejemplos anteriores, podemos generalizar la formulación y postular que, una ley cualquiera, solución de un problema de mecánica de los fluidos, podrá escribirse de la manera más general

$$F_1 (q_1, q_2, \cdots q_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots \tag{9-4}$$
$$F_2 (q_1, q_2, \cdots q_n) = 0$$

donde algunas de las variables q_i serán conocidas y las otras incógnitas.

Parámetros adimensionales. Lo que se propone al análisis dimensional es establecer, como se dijo, las restricciones a que están sometidas las funciones f_i o F_i para que sean dimensionalmente homogéneas, o sea que puedan tener un significado físico preciso y correcto. Para ello será condición evidentemente necesaria que las

magnitudes q_i aparezcan o *puedan aparecer* agrupadas en productos adimensionales, del tipo

$$\pi_1 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\beta_1} q_3^{\gamma_1} \cdots q_l^{\lambda_1} \quad l \leqslant n, \tag{9-5}$$

donde los exponentes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ son números racionales. Estos productos o parámetros adimensionales pueden obtenerse de varias maneras y jugarán un papel importante en lo que sigue. Son del tipo ya encontrado en (8.50). Como ejemplo, se comprobará fácilmente que (9.3) puede escribirse en la forma

$$\frac{H}{D} = f_1\left(\frac{Q}{ND^3}, \frac{\rho N D^2}{\mu}, \frac{\epsilon}{D}, \frac{E_\theta}{\rho N^2 D^2}, \frac{g}{DN^2}\right), \tag{9-6}$$

la cual dice simplemente, que entre los parámetros adimensionales

$$\pi_1 = \frac{H}{D} \quad \pi_2 = \frac{Q}{ND^3} \quad \pi_3 = \frac{\rho N D^2}{\mu}$$
$$\pi_4 = \frac{\epsilon}{D}, \quad \pi_5 = \frac{E_\theta}{\rho N^2 D^2} \quad \pi_6 = \frac{g}{DN^2} \tag{9-7}$$

existe una relación funcional f_1. Se observará que esta expresión da una idea más precisa de la estructura de la solución buscada.

Asimismo, las ecuaciones (9.4) se podrán expresar, una vez identificados los parámetros π_1, en la forma general

$$\varphi_1(\pi_1, \pi_2 \cdots \pi_\epsilon) = 0,$$
$$\varphi_2(\pi_1, \pi_2, \quad \pi_\epsilon) = 0, \tag{9-8}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots, \quad \epsilon < n$$

donde las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, se llamarán *funciones reducidas* da las $F_1, F_2, \ldots$,.

La obtención de los productos adimensionales del tipo (9.5) y (9.7) y la presentación de la estructura de una ley física (eventualmente desconocida) en la forma reducida (9.8) constituyen el propósito fundamental del análisis dimensional.

9.3 Teorema de Vaschy-Buckingham

Para llevar a término la reducción planteada en la sección anterior se va a establecer un procedimiento eficiente y se va a demostrar la posibilidad de éxito en todo caso.

1. Plantemaiento del problema

Como se habrá observado, (9.7), los parámetros adimensionales π_i están formados por las distintas magnitudes que realmente aparecen en el problema (9.3), y en todos estos productos, intervienen *repetidamente* las magnitudes N, D y ρ. Esta observación es importante: los productos adimensionales se construyen con *las magnitudes del problema*, usando un grupo de ellas como *base* en forma repetida, con cada una de las restantes. Se presentan pues simultáneamente varias dificultades que se pueden enunciar y clasificar de la siguiente manera:

1. ¿Cómo saber de antemano, (sino se tienen las ecuaciones diferenciales de un problema) cuales magnitudes físicas intervienen en él y cómo escogerlas, esto es, cómo, a priori, escribir una relación funcional del tipo de las (9.3) ó (9.4)?
2. Suponiendo que se haya logrado el punto anterior, ¿cómo escoger, las magnitudes que servirán de *base*?, esto es, ¿saber cuáles y cuántas de ellas se han de tomar para ese propósito?
3. ¿Cuál procedimiento sistemático seguir para obtener los parámetros adimensionales π_i sin error?
4. ¿Cómo asegurar que una función de la forma (9.8) es la expresión más general de la o las funciones reducidas buscadas?

Los conceptos fundamentales que responden a estas preguntas están contenidos en el Teorema de Vaschy-Buckingham. Aquí procederemos sin embargo, a responderlas una por una, sin prejuicio de dar posteriormente el teorema aludido y su demostración.

Magnitudes que intervienen. Dado un fenómeno físico, los factores que en él intervienen son generalmente en parte conocidos, en parte resultado de la apreciación y del grado de precisión buscado. La lista de las magnitudes por incluir no será rígida: si hay más de la cuenta, la experiencia dirá cuales no son necesarias, si faltan, también la experiencia indicará (tras hacer intervenir el factor olvidado y observar una variación de los resultados) la necesidad de su inclusión.

Así por ejemplo, si se trata de establecer la lista de factores que intervienen en la resistencia al avance (fuerza de arrastre) que actúa sobre un buque de forma dada, se podrá establecer la siguiente lista:

1. Una longitud L, característica del tamaño del buque,
2. Su velocidad U,
3. La viscosidad del agua μ,
4. La densidad ρ,
5. La gravedad g.

Si se agregara a esta lista algún factor que realmente no interviene, como la masa del buque, por ejemplo, la experiencia se encargaría, a posteriori, de indicar su redundancia. Al contrario si alguno de los

factores indicados se hubiese olvidado, por ejemplo la viscosidad μ, al probar con distintos fluidos se pondría al descubierto la necesidad de incluirlo.

2. Escogencia de las magnitudes de base

Las magnitudes de base habrán de ser escogidas de manera que en conjunto abarquen *todas* las *dimensiones físicas* que se presentan en el problema. Así por ejemplo, en un problema de cinemática habrán dos dimensiones (longitud y tiempo), en uno de dinámica 3 a saber, longitud, masa y tiempo, y en otro de transferencia de calor habrá que agregar la temperatura. Dicho esto, no cabe duda que una estructura dimensional sencilla para las magnitudes de base no puede sino facilitar los cálculos. Por eso, una buena regla consiste en escogerlas de manera sucesiva, con una dimensión adicional dada vez.

Veamos un ejemplo. Partiendo de (9.3) se pueden escoger como magnitudes de base, las siguientes:

El diámetro D de la bomba, de dimensiones $[D] = L,$

La velocidad angular N $[N] = T^{-1},$

La densidad ρ, de dimensiones $[\rho] = ML^{-3}.$

Es evidente que con este procedimiento, cualquier otra magnitud mecánica habrá de poder expresarse en la forma (9.5) particularizada

$$\pi_i = q_i D^{\alpha} N^{\beta} \rho^{\gamma} \qquad (9\text{-}9)$$

3. Determinación de los parámetros adimensionales π_i. Ejemplo

Para sistematizar la determinación de los parámetros π_i, se recomienda hacer un *cuadro de las dimensiones* de todas las magnitudes que aparecen en un problema, empezando por las que se han escogido como base.

Así por ejemplo, en el caso de la ecuación de una bomba, (9.3), si cada q_i es del tipo

$$[q_i] = L^{a_{i1}} M^{a_{i2}} T^{a_{i3}}$$

se obtiene el siguiente *cuadro dimensional:*

Magnitud	Símbolo	Exponente de L	Exponente de M	Exponente de T
Diámetro	D	1	0	0
Veloc. ang.	N	0	0	−1
Densidad	ρ	−3	1	0
Caudal	Q	3	0	−1
Módulo de Compr.	E_θ	−1	1	−2
Viscosidad	μ	−1	1	−1
Rugosidad	ϵ	1	0	0
Gravedad	g	1	0	−2
Carga	H	1	0	0

Hecho esto, la formación de las π_i, según (9.9) es inmediata. En efecto, puesto que esos productos han de ser adimensionales, la expresión

$$\pi_1 = Q D^{\alpha_1} N^{\beta_1} \rho^{\gamma_1}$$

implica la ecuación dimensional

$$L^0 M^0 T^0 = L^3 M^0 T^{-1} L^{\alpha_1} T^{-\beta_1} L^{-3\gamma_1} M^{\gamma_1}$$

esto es, las tres ecuaciones algebraicas

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + 0 - 3\gamma_1 + 3 = 0 \\ 0 + 0 + \gamma_1 + 0 = 0 \\ 0 - \beta_1 + 0 - 1 \quad 0 \end{array}\right\}$$

Se notará que este sistema sólo tendrá raíces independientes si el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

siendo éste, el determinante formado con los coeficientes a_i correspondientes a la base.

En el ejemplo actual, puesto que $\Delta = 1$, se obtiene

$$\alpha_1 = -3, \quad \beta_1 = -1, \gamma_1 = 0,$$

es decir que

$$\pi_1 = QD^{-3}N^{-1} = \frac{Q}{ND^3}.$$

es un parámetro adimensional, comprobándose así uno de los resultados de (9.7).

4. Parámetros adimensionales. Método general

Para establecer la metodología general, a la luz del ejemplo anterior, partamos de (9.4), suponiendo que el número de dimensiones F_i es m, a saber

$$F_1, F_2, F_3 \cdots F_m \qquad (9\text{-}11)$$

Las distintas magnitudes que intervienen en el problema pueden entonces, expresarse en la forma

$$[q_i] = F_1^{a_{i1}} F_2^{a_{i2}} F_3^{a_{i3}} \cdots F_m^{a_{im}}, \qquad (9\text{-}12)$$

y por consiguiente el cuadro de los exponentes a_{ij} forma una matriz A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \qquad (9\text{-}13)$$

obtenida del cuadro de dimensiones siguientes,

(9-14)

Símbolo	Exponentes de F_1	Exponentes de F_2	$\cdots$	Exponentes de F_m
q_i	a_{11}	a_{12}		a_{1m}
q_2	a_{21}	a_{22}		a_{2m}
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$
q_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{im}
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$
q_n	a_{n1}	n_{n2}		a_{nm}

tal como se hizo en el ejemplo anterior.

La escogencia de las *magnitudes de base* se hará ahora entre las q_n que intervienen en el problema mediante el procedimiento siguiente, el cual se justificará a posteriori.

Puesto que $n \geqslant m$, escoger una submatriz $m \times m$ de A, por ejemplo la formada por la m primeras filas, y formar el determinante de dicha submatriz.

Si este determinante es distinto de cero, las magnitudes correspondientes pueden formar una base para expresar las demás en términos de ellas.

Si el determinante es nulo, se buscarán los determinantes de las otras submatrices de mismo orden (poniendo una fila distinta cada vez). Si alguno de ellos es distinto de cero, se tiene el caso anterior. Si todos los determinantes de orden $m \times m$ son nulos, se hará lo mismo con las matrices de orden $(m-1)\, m$. Si al menos uno de los determinantes correspondientes es distinto de cero, las q_i correspondientes son independientes y pueden servir de base, sino, se repiten los pasos anteriores.

Para formar ahora los parámetros adimensionales π_i, partimos de (9.5), que ahora puede simplificarse, escribiendo

$$\pi_i = q_i\, q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k}, \qquad k < i \leqslant n \qquad (9\text{-}15)$$

donde se ha supuesto que la k primeras magnitudes son independientes y han sido tomadas por *base*. Esta expresión postula que cada una de las magnitudes restantes puede formar un producto adimensional con las k primeras.

El teorema de Vaschy-Buckingham consiste en decir que con las n magnitudes (9.4) en consideración, de las cuales m han sido escogidas como base, es *siempre posible* formar *n-m* productos adimensionales y escribir relaciones funcionales en forma de *funciones reducidas* del tipo (9.8).

Ejemplo 1:

Suponiendo que no se conocen las leyes que rigen la caída de presión a lo largo de una tubería por la cual circula un fluido, explicar cómo se pueden organizar experimentos que hagan aparecer las magnitudes que intervienen. Encontrar una expresión adimensional de la forma de la ley física que da dicha caída, e indicar cómo se pueden representar gráficamente en la forma más compacta posible los resultados experimentales.

Para saber de qué factores físicos depende la caída de presión Δp entre dos puntos de una tubería por la cual circula un fluído, se pueden ejecutar varios experimentos sencillos que los pongan inmediatamente en evidencia. Dado que la intuición misma los sugiere, algunos de esos experimentos pueden ser totalmente innecesarios.

Cambiando la velocidad, el diámetro, la densidad, la viscosidad (por ejemplo calentando), la longitud del tubo y la rugosidad se observa inmediatamente que

$$\Delta p = F(U, D, \rho, \mu, l, \epsilon). \qquad (1)$$

Si alguno de esos factores se olvidara, la experiencia inmediatamente indicaría su omisión.

Magnitudes de base. Estas podrían ser cualesquiera, siempre que formen una base completa y que el determinante que forman sus dimensiones sea distinto de cero.

Escojamos el diámetro, la velocidad y la densidad. Se tiene el cuadro dimensional siguiente:

	L	M	I
D	1	0	0
U	1	0	−1
ρ	−3	1	0
Δp	−1	1	−2
μ	−1	1	−1
l	1	0	0
ϵ	1	0	0

donde se han incluido, de una vez, las dimensiones de las demás magnitudes.

El determinante Δ de las dimensiones de las bases es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Luego, la base es completa.

Producto adimensional π_1.

Escribamos

$$\pi_1 = \Delta p \, D^{\alpha_1} \, U^{\beta_1} \, \rho^{\gamma_1}$$

que ha de ser un producto adimensional. Luego

de donde el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 - 3\gamma_1 - 1 &= 0 \\ \gamma_1 + 1 &= 0 \\ -\beta_1 - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Este sistema tiene por soluciones

$$\beta_1 = -2, \quad \gamma_1 = -1, \quad \alpha_1 = 0,$$

de donde se concluye que

$$\pi_1 = \Delta p \, U^{-2} \, \rho^{-1} = \frac{\Delta p}{\rho U^2}.$$

Producto π_2. Haciendo intervenir la viscosidad, escribamos

$$\pi_2 = \mu \, D^{\alpha_2} \, U^{\beta_2} \, \rho^{\gamma_2},$$

que ha de ser un producto adimensional. Luego

$$L^0 M^0 T^0 = L^{-1} M^1 T^{-1} L^{\alpha_2} L^{\beta_2} T^{-\beta_2} L^{-3\gamma_2} M^{\gamma_2},$$

de donde el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 - 3\gamma_2 - 1 &= 0 \\ \gamma_2 + 1 &= 0 \\ -\beta_2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones son

$$\beta_2 = -1, \quad \gamma_2 = -1, \quad \alpha_2 = -1$$

Se concluye que

$$\pi_2 = \mu \, D^{-1} U^{-1} \rho^{-1} = \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{\nu}{U D} = \frac{1}{R_e}$$

Observando que el inverso es también adimensional, escribamos

$$\pi_2' = R_e.$$

Producto π_3. Dado que l y D tienen las mismas dimensiones, concluimos sin hacer ningún cálculo que

$$\pi_3 = l D^{-1} = \frac{l}{D}$$

es un producto adimensional.

Producto π_4. Por las mismas razones escribimos

$$\pi_4 = \frac{\epsilon}{D}$$

Teorema de Vaschy-Buckingham

Sabemos que la forma reducida, esto es, la más sencilla de la fórmula (1), es dada por

$$\pi_1 = F(\pi'_2, \pi_3, \pi_4)$$

esto es

$$\frac{\Delta p}{\rho U^2} = F(R_e, \frac{l}{D}, \frac{\epsilon}{D}). \tag{2}$$

Este es el resultado que permite alcanzar el análisis dimensional.

Resultados experimentales

Una serie sencilla de experimentos muestra inmediatamente que Δp es proporcional a l. Luego se concluye inmediatamente que

$$\Delta p = \rho U^2 \frac{l}{D} f_1(R_e, \frac{\epsilon}{D})$$

Por razones prácticas, interesa calcular $\frac{\Delta p}{\gamma} = h_f$, como se verá en el Capítulo 10. Luego se tiene

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = hf = \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g} f(R_e, \frac{\epsilon}{D})$$

donde $f = 2f_1$. Se llega de esta manera a la expresión de Darcy-Weisbach.

$$\boxed{h_f = f \frac{l}{D} \frac{U^2}{2g},} \tag{3}$$

donde el análisis dimensional informa que f depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa

$$f = f(R_e, \frac{\epsilon}{D}) \tag{4}$$

Los ensayos experimentales exigidos para determinar f son muy laboriosos, como se sabe. El análisis dimensional indica que los parámetros que habrá de hacer variar en los experimentos son R_e y ϵ/D. Dado que (4) hace intervenir tres variables: R_e, ϵ/D, f, se podrán resumir *todos* los casos en un *sólo gráfico* bidimensional, llevando por ejemplo R_e en abscisas y f en ordenadas. Se obtendrá pues, a priori, una serie de curvas, una para cada valor de parámetro ϵ/D.

El lector sabe (o aprenderá) que esos experimentos han sido realizados y que el gráfico obtenido se llama diagrama de Moody. (Ver cap. 10).

Ejemplo 2:

Encuéntrese la estructura de la fórmula que da la resistencia F_D al avance, de todos los cuerpos geométricamente semejantes que se mueven parcialmente sumergidos en un fluido compresible de densidad ρ y viscosidad μ, con una velocidad uniforme U.

Solución:

La resistencia del fluido es debida a la fricción sobre las paredes del cuerpo y a la resistencia generada por la producción de ondas. Dependerá además del tamaño del cuerpo, caracterizado por una longitud L, de la velocidad U, la densidad ρ, la viscosidad μ y el módulo de compresibilidad E del fluido, así como de la intensidad g de la gravedad.

Podemos pues escribir

$$F_D = f(U, l, \rho, \mu, E, g).$$

Como *magnitudes de base* se tomarán la velocidad U, la longitud l y la densidad ρ. El cuadro dimensional es entonces el siguiente:

	L	M	T
l	1	0	0
U	1	0	−1
ρ	−3	1	0
F_D	1	1	−2
μ	−1	1	−1
E	−1	1	−2
g	1	0	−2

Habiendo verificado que la base es completa, se obtienen los productos adimensionales.

Fuerza de arrastre. Escribamos

$$\pi_1 = F_D \, l^{\alpha_1} U^{\beta_1} \rho^{\gamma_1}$$

y determinemos $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ a partir de la condición

$$L^0 M^0 T^0 = LMT^{-2} L^{\alpha_1} (LT^{-1})^{\beta_1} (L^{-3}M)^{\gamma_1}$$

$$= LMT^{-2} L^{\alpha_1} L^{\beta_1} T^{-\beta_1} L^{-3\gamma_1} M^{\gamma_1}$$

o sea que

$$0 = 1 + \alpha_1 + \beta_1 - 3\gamma_1$$

$$0 = 1 + \gamma_1$$

$$0 = -2 - \beta_1$$

de donde

$$\alpha_1 = -2, \quad \beta_1 = -2, \quad \gamma_1 = -1.$$

luego

$$\pi_1 = \frac{F_D}{\rho U^2 l^2}$$

Viscosidad

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho l U} \quad \text{ó} \quad \pi_2 = \frac{lU}{\nu} = R_e$$

Módulo de compresibilidad. Escribamos

$$\pi_3 = E \, l^{\alpha_3} U^{\beta_3} \rho^{\gamma_3}$$

y determinemos α_3, β_3, γ_3, a partir de

$$L^0 M^0 T^0 = L^{-1} M T^{-2} L^{\alpha_3} (LT^{-1})^{\beta_3} (L^{-3}M)^{\gamma_3}$$

$$= L^{-1} MT^{-2} L^{\alpha_3} L^{\beta_3} L^{-3\gamma_3} T^{-\beta_3} M^{\gamma_3}$$

o sea que

$$0 = -1 + \alpha_3 + \beta_3 - 3\gamma_3$$

$$0 = 1 + \gamma_3$$

$$0 = -2 - \beta_3$$

de donde

$$\alpha_3 = 0, \quad \beta_2 = 2, \quad \gamma_3 = -1,$$

y por consiguiente

$$\pi_3 = \frac{E}{\rho U^2}$$

o también

$$\pi_3' = \frac{U}{\sqrt{E/\rho}}$$

Gravedad. Se encuentra: $\pi_4 = \dfrac{U}{\sqrt{gl}}$

Según el teorema de Vaschy-Buckingham podemos pues escribir

$$\frac{F_D}{\rho U^2 l^2} = f\left(\frac{lU}{\nu}, \frac{U}{\sqrt{E/\rho}}, \frac{U}{\sqrt{gl}}\right)$$

$$= f(R_e, M, F_r).$$

donde

$$M = \frac{U}{\sqrt{E/\rho}}, \quad F_r = \frac{U}{\sqrt{g\,l}},$$

se puede llamar número de Mach, y de Froude, respectivamente

5. Deducción del teorema de Vaschy-Buckingham[1] (teorema π)

Este teorema permite asegurar que la expresión del tipo

$$\varphi(\pi_{k+1}, \pi_{k+2}, \cdots \pi_k) =), \qquad (9\text{-}16)$$

donde n es el número de magnitudes que intervienen en el problema y k el número de magnitudes tomadas como base, representa la forma reducida más sencilla posible de la ley física buscada.

[1] E. Buckingham, "Model Experiments and the Forms of Empirical Equations". *Transact. ASME.*, Vol. 37, 1915.

En efecto esa ley física puede, a priori, escribirse en la forma (9.4) como ya sabemos

$$F(q_1, q_2, \cdots q_n) = 0, \tag{9-17}$$

Supongamos que las dimensiones independientes que intervienen en estas magnitudes son k en número, y que por consiguiente, las k primeras, por ejemplo, $q_1, q_2, q_3 \dots q_k$, forman base, esto es, permiten formar, con cada una de las n-k restantes, parámetros adimensionales del tipo (9.15).

$$\pi_i = q_i\, q_1^{\alpha_1}\, q_2^{\alpha_2} \cdots q_k^{\alpha_k} \qquad k < i \leqslant n, \tag{9-18}$$

De estas expresiones (9.18) se pueden despejar las q_i, $(k < i \leqslant n)$ en función de π_i y de las q_i de base.

Si se sustituyen los valores así obtenidos en (9.17) , se obtiene una relación funcional, nueva, del tipo

$$\Phi(q_1, q_2, \cdots q_k, \pi_{k+1}, \pi_{k+2}, \cdots \pi_n) = 0. \tag{9-19}$$

Queda por demostrar que, mediante esta sustitución en la función Φ desaparecieron, no sólo las variables $q_x, q_{k+1}, \dots q_n$, sino también las magnitudes de base $q_1, \dots q_k$.

Para mostrar esto partimos de la observación que las expresiones (9.17) y (9.19) de la ley física en estudio, son dimensionalmente homogéneas. Supongamos entonces que efectuamos un cambio de *unidades* de las magnitudes $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots q_n$. Como consecuencia, las cantidades que las miden no son ya $q_{k+1}, q_{k+2}, \dots q_n$, sino $q'_{k+1}, q'_{k+2}, \dots q'_n$.

Basándonos en (9.18) y puesto que los π_i son adimensionales, esto es, que son invariables en ese cambio de variables, determinamos las nuevas cantidades $q_1^1, q_2^1 \dots q_k^1$, que miden las bases.

Pero como la ley física (9.19) es invariante ante un cambio de variables, según indicado, se tendrá ahora

$$\Phi(q'_1, q'_2, \cdots q'_k, \pi_{k+1}, \pi_{k+2}, \cdots \pi_n) = 0. \tag{9-20}$$

Esto indica que (9.19) es válida si se sustituyen $q_1, q_2, \dots q_k$ por otros valores $q'_1, q'_2, \dots q'_k$, *cualesquiera*. Se pueden pues escoger unos valores constantes $q_1^*, q_2^*, \dots q_k^*$, y escribir (9.19) de la siguiente manera:

$$\Phi(q_1^*, q_2^*, \cdots q_k^*, \pi_{k+i}, \pi_{k+2}, \cdots \pi_k) = 0.$$

Como sería inútil escribir explícitamente esas constantes (9.21) se transforma en

$$\varphi(\pi_{k+1}, \pi_{k+2}, \cdots \pi_n) = 0.$$

o cambiando la notación

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_{n-k}) = 0, \tag{9-22}$$

que es precisamente la expresión del teorema.[2]

Ejercicios

1. Se sabe que la potencia necesaria $\dot{W}$ para mover una hélice de avión depende de los siguientes factores: diámetro de la hélice, D; velocidad del sonido en el fluido, c; velocidad angular de la hélice, ω; velocidad del avión V; densidad y viscosidad del fluido, ρ y μ, respectivamente.

a) De acuerdo con el teorema de Vaschy-Buckingham, ¿cuántos parámetros adimensionales caracterizan el problema?

b) Tomando D, U, ρ como magnitudes de base, determinar dichos parámetros e indicar qué tipo de relación funcional existe entre ellos.

c) Explique cómo se representaría gráficamente la ley experimental buscada, en términos de los parámetros hallados.

Respuesta: $\dot{W} / \rho D^2 U^3 = f(M, \omega D/U, R_e)$

2. El par motor de una turbina depende del caudal Q, de la carga de entrada H (altura), del peso específico γ, la velocidad angular ω y la eficiencia η. Determínese el par motor T como una relación funcional entre parámetros adimensionales. Como magnitudes de base, se tomarán γ, H, Q.

Respuesta: $T/\gamma H^4 = f(\omega H^3/Q, \eta)$

3. El caudal que fluye por un pequeño orificio depende de la carga de entrada H, de la gravedad g, del diámetro del orificio D, de la densidad, la viscosidad y la tensión superficial, ρ, μ, τ respectivamente y de la rugosidad ϵ. Encontrar de qué grupos adimensionales depende el coeficiente de descarga C_d.

Respuesta: $\rho D \sqrt{g H}/\mu$, D/H, $\tau/\rho g H^2$, ϵ/H.

---

[2] Ver otra demostración en H. L. Langhaar, *Dimensional Analysis and Theory of Models*, Wiley.

4. Determinar los factores adimensionales de que depende el caudal de un vertedero triangular en V, donde Q es el caudal, h de altura sobre el vértice, ρ, ν y τ la densidad, viscosidad cinemática y tensión superficial, respectivamente, β el ángulo y g la gravedad.

Respuesta: $Q = g^{1/2}\, h^{5/2}\ \Phi(g^{1/2}\, h^{3/2}/\nu,\ gh^2\rho/\tau, \beta).$

9.4. Teoría de modelos

La teoría anterior permite establecer criterios para organizar un experimento físico en el cual se quiere establecer la relación adimensional que liga las varias magnitudes involucradas en un fenómeno. Es posible sin embargo que, dadas las dimensiones del o de los objetos que intervienen, no sea posible llevar a cabo el experimento en verdadero tamaño. Así por ejemplo, si se quiere estudiar la influencia de la forma de un buque sobre la resistencia al avance, o su estabilidad etc., no es muy conveniente llevar a cabo el experimento cuando el buque ya esté construido. Se prefiere en estos casos, tratar de hacer un modelo a escala y, reproduciendo sobre él los mismos movimientos que en el prototipo, medir las magnitudes que se desean conocer.

1. Criterios de semejanza

Para llevar a cabo este programa, hace falta asegurarse que el modelo está sujeto a los mismos fenómenos que el prototipo, sólo que a una escala menor, y hace falta, naturalmente, conocer dicha escala. Será pues necesario establecer una serie de criterios de semejanza, que consideramos a continuación.

Semejanza geométrica. Es necesario en primer lugar que los objetos que intervienen en el modelo y en el prototipo sean geométricamente semejantes, es decir que sus tamaños característicos correspondientes estén todos entre sí, en la misma proporción.

Semejanza dinámica. Se entiende por semejanza dinámica el hecho de que el flujo en el modelo sea, en una proporción conocida, exactamente la imagen del flujo en el prototipo, de manera que las velocidades, las fuerzas, etc. en el uno y en el otro estén relacionadas entre sí de una manera perfectamente definida.

El procedimiento más rápido para establecer las condiciones de semejanza dinámica consiste en escribir, en forma adimensional, la o las ecuaciones diferenciales que rigen el fenómeno, con, eventualmente, las condiciones de contorno. Al estar en forma adimensional, dichas ecuaciones y condiciones, habrán de ser las *mismas* en el modelo y en el prototipo, de donde se deducirán inmediatamente los criterios de semejanza.

Así por ejemplo, para un problema relacionado con un fluido incompresible, y que esté regido totalmente por las ecuaciones de Navier Stokes (8.13) se concluye inmediatamente, al ponerlas en la forma adimensional (8.51).

$$a_y^* = -\frac{1}{2} E_u \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{R_e} \nabla^2 u_y^* - \frac{1}{F_r^2}\,, \tag{9-30}$$

que el criterio completo para que los flujos sean dinámicamente semejantes, es que los números E_u, R_e, F_r *sean los mismos* en el modelo y en el prototipo. Se obtiene de esta manera, llamando E'_u, R'_e, F'_r los números adimensionales en el prototipo y E_u, R_e, F_r los correspondientes del modelo,

$$E_u = E'_u\ , \quad R_e = R'_e\ , \quad F_r = F'_r\ . \tag{9-31}$$

Se puede apreciar la efectividad de la información que dan las ecuaciones del movimiento, incluso cuando no se las sabe integrar.

Existe una manera mucho más elemental de establecer los criterios de semejanza, mediante un razonamiento físico-intuitivo. Consiste en considerar, en cada problema, cual es la naturaleza de las fuerzas que intervienen y de establecer los parámetros adimensionales que las relacionan. Esos parámetros deben de ser iguales en el modelo y en el prototipo.

Así por ejemplo, consideremos las fuerzas de inercia. Sus dimensiones son del tipo masa × aceleración

$$F_i \propto \rho L^3 L T^{-2}$$

$$\propto \rho l^2 U^2$$

donde l y U son una longitud y una velocidad características.

Asimismo, las fuerzas de viscosidad son del tipo

$$F_\nu \propto A\mu \frac{du_x}{dy} \propto \mu \frac{U}{l} l^2 \tag{9-32}$$

$$\propto \rho\, \nu\, Ul$$

La razón entre ambos tipos de fuerza da

$$\frac{F_i}{F_v} \alpha \frac{\rho l^2 U^2}{\rho \nu U l} = \frac{lU}{\nu} = R_e. \tag{9-33}$$

Supongamos ahora que tenemos un modelo y un prototipo. En el prototipo la relación F_i/F_ν será dada por

$$\frac{l'U'}{\nu'} = R'_e. \tag{9-35}$$

En el modelo, donde las magnitudes correspondientes se designan por l, U, γ se tendrá

$$\frac{lU}{\nu} = R_e, \tag{9-36}$$

Para que haya semejanza dinámica habrá, pues, de cumplirse

$$R_e = \frac{lU}{\nu} = \frac{l'U'}{\nu'} = R'_e \tag{9-38}$$

Ejercicios

1. Mostrar que si entre las fuerzas que influyen en un fenómeno intervienen las fuerzas de gravedad F_g, caracterizadas por un valor de g, la relación entre éstas y las de inercia F_i es dada por

$$\frac{F_i}{F_g} \alpha \frac{U}{\sqrt{gl}} = F_r$$

donde F_r es el número de Froude.

2. Mostrar que cuando intervienen fuerzas de tensión superficial τ se tiene

$$\frac{F_i}{F_s} \alpha \frac{\rho U^2 l}{\tau} = W$$

donde W es el número de Weber.

2. Aplicación de los criterios de semejanza

A menudo ocurre que un fenómeno esté regido por un sólo tipo de fuerzas, además de las de inercia. Por ejemplo, supongamos que se trate de las fuerzas de viscosidad, como ocurre en el *flujo en una tubería*. Entonces entre el modelo y el prototipo, para tener semejanza dinámica, ha de cumplirse la relación

$$R_e = R'_e, \tag{9-38}$$

Ello implica que dada, por ejemplo, una velocidad en el prototipo, existe una "velocidad correspondiente" en el modelo, que asegura la semejanza: es aquella que ha de establecerse en el modelo para que (9.38) se cumpla.

Ejemplo:

Se requiere simular el flujo de aire en un ducto mediante un flujo de agua, a escala 1/4. Si el gas tiene una velocidad media de 24 m/seg. se pregunta cuál ha de ser la velocidad en el modelo, y cuál será la pérdida de presión en el ducto si en el modelo ésta es de 0,2 bar por metro de longitud.

Se tomará, para el aire: $\rho = 1{,}3$ kg/m^3, $\mu = 1{,}8 \times 10^{-5}$ kg/m.seg y para el agua $\rho = 1000$ kg/m^3, $\mu = 1{,}3 \times 10^{-3}$ kg/m. seg., y se supondrá que la semejanza geométrica de los tubos incluye las rugosidades.

Para que los flujos sean dinámicamente semejantes, es necesario que se cumpla (9-38)

$$\frac{UD}{\nu} = \frac{U'D'}{\nu'},$$

puesto que la semejanza geométrica ya asegura $\frac{\epsilon}{D} = \frac{\epsilon'}{D'}$. La velocidad correspondiente en el modelo habrá de ser

$$U = U'\frac{D'}{D}\frac{\nu}{\nu'} = 24 \times 4 \times \frac{1.3 \times 10^{-3}}{1000} \times \frac{1.3}{1.8 \times 10^{-5}}$$

$$= 24 \times 4 \times \frac{1.3 \times 10^{-6}}{1.38 \times 10^{-5}} = 9.04 \text{ m/seg.}$$

La pérdida de presión por unidad de longitud será dada por

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{\rho}{D}\frac{U^2}{2} f(R_e, \frac{\epsilon}{D}).$$

Si $\frac{\epsilon}{D}$ y Re son iguales, se tendrá pues, entre el modelo y el protipo

$$\frac{\Delta p}{l \frac{\rho}{D}\frac{U^2}{2}} = \frac{\Delta p'}{l' \frac{\rho'}{D'}\frac{U'^2}{2}}$$

Es decir, en el prototipo, la pérdida de presión en el ducto será

$$\frac{\Delta p'}{l'} = \frac{\Delta p}{l} \frac{\rho'}{\rho} \frac{D}{D'} \frac{U'^2}{U^2}$$

$$= 0.2 \times \frac{1.3}{1000} \times \frac{1}{4} \frac{(24)^2}{(9.04)^2} = 0{,}000548 \text{ bar/m}$$

$$= 0.458 \quad \text{milibar/m.}$$

Ejemplo:

Un barco que tiene una longitud de 135 m ha de tener una velocidad de crucero de 35 km/h. ¿A qué velocidad habrá que arrastrar un modelo a escala 1 : 30 para que el número de Froude sea el mismo para el modelo y para el prototipo? Calcular el número de Froude.

Se tiene que

$$F_r = F_r'$$

o sea

$$\frac{U^2}{gl} = \frac{U'^2}{gl'},$$

ya que la intensidad de la gravedad será la misma en ambos casos.

Luego

$$U = U' \sqrt{\frac{l}{l'}} = 35 \sqrt{\frac{1}{30}} = 6.4 \text{ m/seg.}$$

El número de Froude es

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{gl}} = \frac{35 \times 10^3}{3600 \sqrt{9{,}8 \times 135}} = 0.26.$$

En numerosos casos prácticos, las características de los fluidos empleados en el modelo y en el prototipo no pueden ser escogidos arbitrariamente, ya que no hay muchos fluidos disponibles para trabajos de laboratorio.

Ocurre pues que los criterios de semejanza no pueden ser todos satisfechos completamente.

Ejemplo:

Se quiere establecer un modelo para el estudio de la *resistencia al avance* de un avión supersónico en un túnel de prueba. El prototipo ha de volar a 1200 km/h.

en una atmósfera quieta de densidad 1,3 kg/m³, y viscosidad cinemática 1.2 × 10^{-6} m²/seg, con una presión de 1 bar. Una longitud característica de su tamaño es $l = 50$ m. Se quiere hacer el modelo a escala 1/10. Se pide:

1. Estudiar la posibilidad de hacer funcionar el túnel utilizando aire atmosférico en ambos casos.

2. Si la condición anterior es imposible de cumplir, determinar a qué presión correspondiente tendrá que estar sometido el túnel, así como la densidad y velocidad del aire, admitiendo que la viscosidad tiene el mismo valor.

3. Si se midió una fuerza de arrastre de N, en el modelo, qué potencia habrán de tener los motores del avión para mantener la velocidad de crucero.

Para que el modelo simule dinámicamente al prototipo es necesario que sean a la vez iguales los números de Reynolds y de Mach, (ejemplo 2, sección 9-3), ya que el avión está completamente sumergido en el fluído. Esto es, se ha de tener

$$R_e = R'l, \tag{1}$$

$$M = M', \tag{2}$$

esto es

$$\frac{\rho U l}{\mu} = \frac{\rho' U' l'}{\mu'}, \tag{3}$$

y

$$\frac{U}{\sqrt{E/\rho}} = \frac{U'}{\sqrt{E'/\rho'}}. \tag{4}$$

1. Si se usa el mismo fluido en el modelo y en el prototipo, es decir, aire se tiene $\rho = \rho'$ y $\mu = \mu'$.

Entonces concluimos de (3) que

$$Ul = U'l',$$

esto es que la velocidad en el modelo ha de ser

$$U = U' \frac{l'}{l}$$

esto es, puesto que $\dfrac{l'}{l} = 10$

$$U = 10\,U' = 10 \times 1200 \text{ km/h.} = 12000 \text{ km/h.} \tag{5}$$

Por otra parte, de (4) concluimos que

$$U = U' \tag{6}$$

ya que también $E = E'$.

Ahora bien, hay una contradicción entre (5) y (6), aparte de que (5) sería imposible de realizar. Luego no se puede usar, en el modelo, aire con las mismas características atmosféricas que en el vuelo considerado.

2. Se puede, tratándose de aire, lograr una solución haciendo trabajar el túnel bajo presión. Tómese pues

$$p' = 10\,p = 10 \text{ bar},$$

entonces

$$\rho' = 10\,\rho = 13 \text{ Kg/m}^3$$

Admitiendo, como se comprueba, que las viscosidades siguen siendo iguales, se tiene ahora, de (3)

$$U' = U\frac{\rho l}{\rho' l'} = U, \tag{7}$$

y de (4) también

$$U' = U;$$

por consiguiente el modelo en estas condiciones será representativo.

Ejercicios

1. Mostrar que la resistencia de arrastre que sufre un barco debido a la formación de olas puede expresarse por

$$R = \rho U^2 l^2 \;\Phi(\frac{U}{\sqrt{gl}}).$$

Se diseña un buque para navegar a la velocidad de 40 km/h. Se encuentra experimentalmente que la componente de la resistencia debida a las ondas en un modelo a escala 1/40 es de 20 N, cuando es remolcado en agua dulce. Encontrar la velocidad de este modelo y la resistencia que sufrirá el prototipo en agua de mar con $\rho = 1025$ kg/m^3.

2. Mostrar que la satisfacción simultánea de los criterios de semejanza de Reynolds y de Froude es imposible, a menos que se utilicen dos líquidos (en el modelo y prototipo) de características totalmente distintas.

3. En el estudio de la resistencia al avance de un barco, Froude propuso de expresar la fuerza de arrastre según

$$\frac{F_D}{\rho U^2 l^2} = \Phi_1(R_e) + \Phi_2(F_r),$$

donde Φ_1 representa la llamada resistencia de superficie y Φ_2 es la resistencia de ondas.

La resistencia de superficie es obtenida experimentalmente y da

$$\Phi_1 = K\,A\,u^n,$$

donde A es la superficie lateral mojada del barco y $K = 0.0048$ SI, $n = 1.83$ en agua dulce y $K = 0.0070$, $n = 1.94$ en agua salada.

La resistencia Φ_2 es obtenida mediante ensayo sobre modelo. Se pregunta la resistencia al avance que actuará sobre el barco cuando se desplace a la velocidad de 45 km/h en el mar, sabiendo que su superficie lateral mojada es de 450 m^2 y que el modelo (a escala 1/25) se desplaza en agua dulce, en la cual experimenta una resistencia al avance de 20 N. ¿Cuál es, además la potencia que deberá tener el motor del barco si la eficiencia de la hélice es del 70% ?

CAPITULO 10

Flujo turbulento

10.1 Introducción

En el movimiento de un fluido viscoso por un tubo, el caso laminar no es el único posible. En efecto, para una velocidad suficientemente grande, el flujo en el tubo se hace de repente extremadamente irregular: las partículas del fluido, y grupos enteros de ellas, adquieren velocidades transversales totalmente variables y sin ninguna aparente ordenación. Las velocidades longitudinales también parecen oscilar en forma cahótica con respecto a su valor promedio. Este tipo de distribución al azar recuerda el movimiento de las propias moléculas del fluido, sometidas a la agitación térmica. Sin embargo, se trata de un fenómeno distinto, a escala mucho mayor puesto que es observable por el ojo, y se le da el nombre de *turbulencia.*

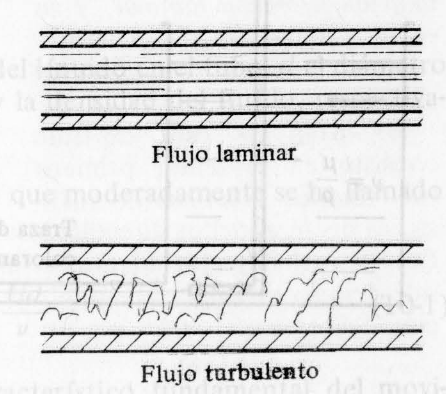


Figura 10.1.

Por cierto que el tamaño de esos *remolinos turbulentos,* como se les llama, puede variar mucho, según cómo y dónde se producen, ya que la turbulencia se presenta prácticamente en todo fluido en movimiento. Así, además de las tuberías que nos han servido de ejemplo inicial, se habla de turbulencia atmosférica, turbulencia en la estela de un buque, chorro de agua turbulento, etc. En cada uno de estos ejemplos, el tamaño de los remolinos turbulentos es, a su vez, variable, yendo desde varios kilómetros en los movimientos de la atmósfera, hasta dimensiones microscópicas en ciertos túneles de viento.

El tratamiento matemático de la turbulencia es, como se verá, extremadamente difícil y hasta el presente no se conoce ninguna solución "exacta", es decir, estrictamente racional, que describa un flujo turbulento.

Históricamente, el primero que trató de cuantificar este ejemplo sorprendente de inestabilidad dinámica fue Osborne Reynolds[1], quien encontró un criterio preciso para saber cuándo un flujo laminar se hace inestable y se transforma en turbulento. Su experimento, descrito en todos los textos de Mecánica de los Fluídos, consistía simplemente en un envase del cual escapaba agua por un tubo largo de vidrio y cuyo caudal era graduable. Para hacer visible el movimiento del líquido, inyectaba un colorante en el centro del tubo. Después de dejar descansar el líquido varias horas y de mantenerlo aislado de

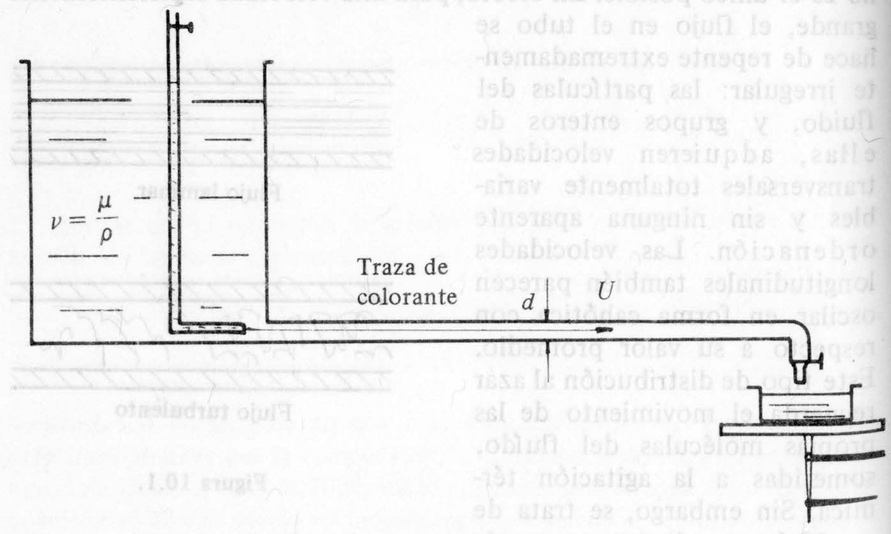


Figura 10.2.

[1] O. Reynolds, *Phil. Trans. Roy. Soc.,* Longres, Vol. 174, 1883, y Vol. 186, 1895.

toda vibración, comenzaba el experimento haciendo pasar el líquido por el tubo, a pequeña velocidad. Se observaba entonces la traza del colorante bien clara y rectilínea en el centro del tubo, siguiendo la trayectoria de las partículas de fluido, tal como se postula para un *flujo laminar.*

Aumentando el caudal, es decir, la velocidad, se observaba que, de repente, el filete coloreado parecía querer ensancharse o diluirse transversalmente en el resto del fluído. En realidad estas perturbaciones no perduraban y desaparecían regresando la traza coloreada a su aspecto normal. El régimen había entonces entrado en lo que se ha llamado una *fase de transición* o de casi-inestabilidad. En efecto si se seguía aumentando la velocidad, Reynolds observó que esas perturbaciones se hacían más frecuentes y de mayor tamaño, hasta el momento que ya no se amortiguaban: entonces, de pronto, el colorante se extendía a toda la masa líquida, en una mezcla completa de las distintas líneas de corriente y la desaparición total del filete coloreado como tal. Este era pues el inicio del *flujo turbulento,* totalmente distinto del flujo laminar.

Llevando a cabo numerosos experimentos en los cuales se hacían variar distintos parámetros, Reynolds observó que, en el caso de tuberías, el inicio de la turbulencia estaba ligado al valor numérico de la cantidad adimensional:

$$\frac{U \rho d}{\mu}$$

donde U era la velocidad media del líquido en el tubo, d el diámetro del mismo, y μ, ρ la viscosidad y la densidad del fluído, respectivamente.

Esta cantidad corresponde a lo que moderadamente se ha llamado número de Reynolds

$$R_e = \frac{Ud}{\nu}, \tag{10-1}$$

y sigue siendo el parámetro característico fundamental del movimiento de un fluído viscoso, como ya hemos visto por otro lado (8.50).

Los resultados experimentales más recientes indican que, en condiciones habituales, el flujo turbulento *en una tubería* se inicia cuando el número de Reynolds alcanza un valor de aproximadamente 2.000. Sin embargo, si se toman medidas muy especiales, a saber,

reposo inicial absoluto del fluido, eliminación de vibraciones y de cambios de temperatura, etc., este valor crece enormemente.

Por otra parte, se ha hecho también el experimento inverso, esto es, partir de un flujo turbulento e ir disminuyendo la velocidad hasta lograr la aparición del flujo laminar. En estas condiciones los resultados son más categóricos, habiéndose observado que el flujo pasa a *laminar* siempre que

$$R_e < 2{,}000 \qquad (10\text{-}2)$$

Para los fines prácticos se toma pues este valor para caracterizar la frontera entre *flujo laminar y turbulento* en una tubería.

Sub-capa laminar

Es de observar que la descripción inicial de la turbulencia aquí presentada no se ha hecho mención alguna de la presencia de las paredes. No cabe duda que muy cerca de éstas, el movimiento de las partículas de fluido es estorbado, y tanto más cuan menor la distancia. Llega pues un momento, muy cerca de la pared en que la turbulencia ya no es posible. Esta zona es llamada *sub-capa laminar,* y su espesor jugará un papel importante en las consideraciones que siguen.

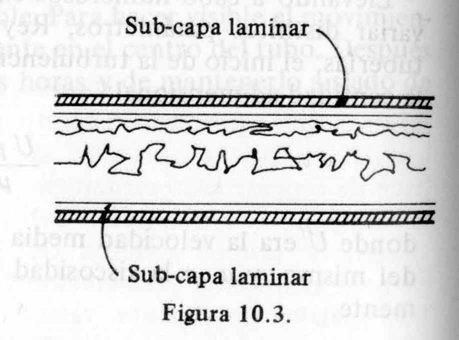


Figura 10.3.

El plan de este capítulo consiste en presentar primero los métodos prácticos de análisis, es decir, aquellos directamente aplicables a la predicción y cuantificación del flujo turbulento, dejando para las últimas secciones consideraciones de tipo más amplio que permitan una mayor profundización del tema.

10.2 Flujo turbulento unidimensional. Esfuerzos de Reynolds

Así como los experimentos de Reynolds fueron efectuados en un tubo, asimismo conviene hacer un primer estudio de la turbulencia pensando en el caso de un flujo unidimensional.

Las razones para ello son a la vez de índole práctica y teórica. De índole práctica porque el flujo dentro de una tubería es el primero que se presenta y se presentó históricamente a los que se impusieron la tarea de conocer las leyes del movimiento de los fluidos y sacar provecho de ellas. De índole teórica, pues las principales preguntas que se pueden plantear ante el fenómeno de la turbulencia se plantean ya en el caso unidimensional.

Consideremos primero esta última afirmación. En el capítulo 8 se estudiaron las relaciones que han de existir en el seno de un fluido en movimiento, entre las velocidades de deformación y los esfuerzos cortantes que se generan como consecuencia: estas relaciones se llamaron *ecuaciones constitutivas* y combinándolas con lo que es esencialmente la ley de Newton, se obtuvieron las *ecuaciones de Navier-Stokes.*

Cabe ahora la pregunta de saber si las ecuaciones así obtenidas son válidas también cuando el flujo es turbulento. La respuesta que se ha dado a esta pregunta es afirmativa. ¿Cómo entonces entra en dichas ecuaciones el fenómeno turbulento? Para responder aquí, hace falta primero, tratar de hacer una *descripción cinemática* de la turbulencia.

Si el fluido se está moviendo, quiere decir que tiene una *velocidad de conjunto* "visible", que puede separarse de la "pulsación" turbulenta.

Para aclarar esta idea consideremos cómo varía con el tiempo la velocidad del fluído en una dirección dada $0x$. Se puede pensar, por ejemplo, en un punto dentro de una tubería y en la velocidad allí observada por un instrumento que fuera lo suficientemente sensible para poder indicar las fluctuaciones temporales. Este intrumento indicaría un gráfico como el representado en la figura adjunta.

Se observa que $u_x = u_x(t)$ representa una variación totalmente irregular, en general de alta frecuencia, alrededor de un cierto *valor promedio* (media temporal), definido como

$$\tilde{u}_x = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u_x(t)\,dt, \qquad (10\text{-}3)$$

donde Δt es un intervalo suficientemente grande para que las

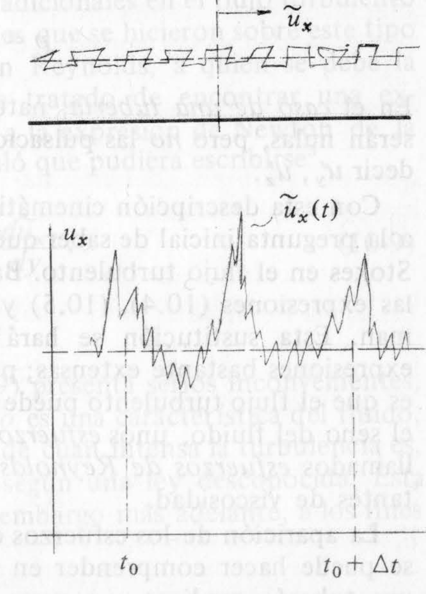


Figura 10.4.

pulsaciones turbulentas queden "borradas" en ese valor promedio y suficientemente pequeñas para que permita una variación "lenta" de $\widetilde{u}_x$ con el tiempo, en el caso de tratarse de un flujo turbulento "no permanente". Un criterio para escoger $\Delta\ t$ puede ser por ejemplo, de que el resultado obtenido, u_x, no dependa del valor inicial t_0, tomado para calcular la integral, ni del propio $\Delta\ t$.

El valor medio temporal $\widetilde{u}_x$ así hallado representa evidentemente la manera en que se mueve el fluido en promedio, si uno no toma en cuenta el vaivén desordenado de la turbulencia, vaivén que de aquí en adelante llamaremos *pulsación*.

La velocidad total del fluído se podrá pues expresar ahora como

$$u_x = \widetilde{u}_x + u'_x \tag{10.4}$$

en la dirección Ox, donde u'_x se llamará justamente velocidad de pulsación. Naturalmente, para un movimiento cualquiera de un fluído se tendrá

$$u_y = \widetilde{u}_y + u'_y$$

$$(10.5)$$

$$u_z = \widetilde{u}_z + u'_z$$

y también, cabe notarlo, como consecuencia de estas pulsaciones de la velocidad, una fluctuación de la presión, del mismo tipo

$$p = \widetilde{p} + p' \tag{10.6}$$

En el *caso de una tubería*, naturalmente, las componentes $\widetilde{u}_y$, $\widetilde{u}_z$, serán nulas, pero *no* las pulsaciones transversales de la velocidad, es decir u'_y, u'_z.

Con esta descripción cinemática de la turbulencia volvamos ahora a la pregunta inicial de saber qué ocurre con las ecuaciones de Navier Stokes en el flujo turbulento. Bastará evidentemente colocar en ellas las expresiones (10.4), (10.5) y (10.6) para ver en qué se transforman. Esta sustitución se hará más adelante, ya que conduce a expresiones bastante extensas; pero lo que se puede decir de una vez es que el flujo turbulento puede ser considerado como generando, en el seno del fluido, unos *esfuerzos cortantes* (y normales) adicionales, llamados *esfuerzos de Reynolds* que se agregan a los esfuerzos cortantes de viscosidad.

La aparición de los esfuerzos de Reynolds debidos a la turbulencia se puede hacer comprender en el caso del flujo unidimensional en una tubería, mediante un razonamiento intuitivo, del mismo tipo que el que explica el fenómeno de la viscosidad.

Para ello consideremos una capa de fluido y sobre ella un elemento de superficie ΔA. Si el movimiento turbulento del fluido en esta zona tiene unas pulsaciones u'_x, u'_y, podemos interpretar u'_y como la diferencia de velocidades, en la dirección $0y$, entre las dos caras del elemento de superficie ΔA. Aplicando el teorema de la *cantidad de movimiento* a un volumen de control de altura infinitésima y de base ΔA, tal como muestra el dibujo, se ve que, el haber un caudal atravesando dicho elemento, caudal debido a u'_y, se genera una fuerza en dirección $0x$, dada por

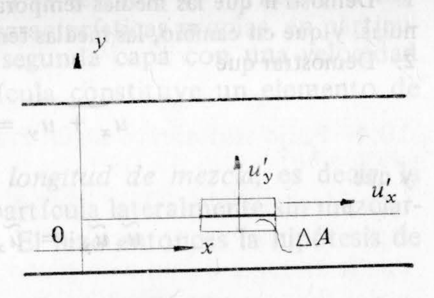


Figura 10.5.

$$\Delta F_x = \rho\ \Delta A\ u'_y u'_x \tag{10-7}$$

esto es, un esfuerzo cortante debido a la turbulencia

$$\boxed{\frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \tau_t = -\ \rho\ u'_x u'_y} \tag{10-8}$$

La aparición de esfuerzos cortantes adicionales en el flujo turbulento fué una de las primeras observaciones que se hicieron sobre este tipo de flujo. Casi simultáneamente con Reynolds, a quien se debe la expresión (10.8), Boussinesq había tratado de encontrar una expresión para τ_t. Como un paralelo a la expresión de Newton de la viscosidad (1.11), Boussinesq postuló que pudiera escribirse[3].

$$\tau_t = A_t \frac{d\widetilde{u}_x}{dy}, \tag{10-9}$$

y llamó a A_t *viscosidad de remolino.*

Es evidente que la relación (10.9) presenta serios inconvenientes, siendo el más importante que A_t *no* es una característica del fluido, sino del *flujo* y depende por tanto de cuan intensa la turbulencia es, de las coordenadas y del tiempo, según una ley desconocida. Esta fórmula para τ_t nos derá útil sin embargo más adelante, a los fines de comparación.

[3] J. Boussinesq, "Théorie de l'écoulement tourbillonant", París, 1897.

Ejercicios

1. Demostrar que las medias temporales de las pulsaciones u'_x, u'_y, u'_z, p', son nulas, y que en cambio, las medias temporales de $\widetilde{u}_x$, $\widetilde{u}_y$, etc., son ellas mismas.
2. Demostrar que

$$\overline{u_x + u_y} = \widetilde{u}_x + \widetilde{u}_y$$

y que

$$\overline{\widetilde{u}_x \widetilde{u}_y} = \widetilde{u}_x \widetilde{u}_y + \overline{u'_z u'_y}$$

10.3 Teoría de Prandtl

Para los efectos del estudio del flujo "unidimensional" de una tubería, la expresión de Reynolds de los esfuerzos cortantes turbulentos nos bastaría, si ella arrojara efectivamente un valor para τ_t. Pero las pulsaciones u'_x, u'_y son desconocidas a priori y, por así decir, constituyen unas incógnitas adicionales a las que aparecían en la teoría del flujo laminar. Es mérito de Prandtl haber propuesto una interpretación fisico-intuitiva que permite eliminar esas incógnitas, siempre que se acepten una serie de hipótesis que vamos a estudiar seguidamente.

Considérese para ello un flujo unidimensional turbulento, con una *velocidad media temporal* $\widetilde{u}_x$ que de aquí en adelante llamaremos simplemente "velocidad".

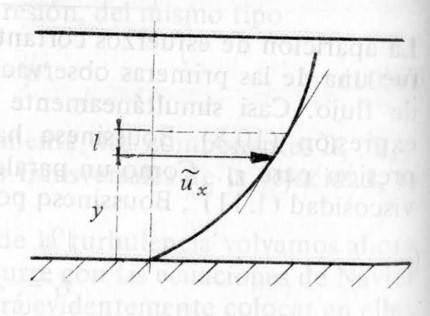


Figura 10.6.

La velocidad $\widetilde{u}_x$ de las distintas capas es variable, por lo cual

$$\widetilde{u}_x = \widetilde{u}_x\,(y). \qquad (10\text{-}10)$$

Debido a la turbulencia hay una *transferencia lateral* de fluido entre una capa de ordenada y y justamente una capa vecina a la distancia l de la primera. La velocidad en esa capa será

$$\widetilde{u}_x\,(y + l) = \widetilde{u}\,(y) + l\,\frac{d\widetilde{u}_x}{dy} + \cdots \qquad (10\text{-}11)$$

según la conocida fórmula de Taylor.

La longitud l se escogerá de manera tal que una partícula de fluido que pasa de la primera capa (y) a la segunda $(y+l)$ llegue a esa segunda capa sin haber perdido sus características propias, en particular su velocidad $\widetilde{u}_x$. Al llegar a la segunda capa con una velocidad distinta a la de esa capa, la partícula constituye un elemento de perturbación.

1a. Hipótesis. Prandtl llamó a *l longitud de mezcla,* es decir, la máxima distancia que recorre una partícula lateralmente sin mezclarse con la capa a la cual va a llegar. El hizo entonces la hipótesis de que la diferencia

$$\widetilde{u}_x(y + l) - \widetilde{u}_x(y) = l\,\frac{d\widetilde{u}_x}{dy},$$

es justamente lo que, en la segunda capa, puede considerarse una *pulsación.* Esto es, postula que

$$u'_x = l\,\frac{d\widetilde{u}_x}{dy}. \qquad (10\text{-}12)$$

2a. Hipótesis. Esta se refiere a la pulsación transversal u'_y. Prandtl postuló que, por razones de continuidad, las dos pulsacioness u'_x y u'_y han de ser del mismo orden de magnitud, y de signo contrario, o sea

$$u'_y = -u'_z \qquad (10\text{-}13)$$

Si estas expresiones se introducen en la fórmula de los esfuerzos cortantes, deducida por Reynolds, (10.8), se tiene

$$\tau_t = -\rho\, u'_x\, u'_y = \rho\, l^2\,\frac{d\widetilde{u}_x}{dy}\,\frac{d\widetilde{u}_x}{dy}, \qquad (10\text{-}14)$$

donde se ha procurado que haya coincidencia tanto en valor absoluto como en signo.

Esta expresión, mucho más compleja que la (10.9) presenta el incoveniente de que la longitud de mezcla es también desconocida. Con toda seguridad

$$l = l\,(y) \qquad (10\text{-}15)$$

pero no se conoce esta función. Sin embargo (10.14) presenta la ventaja enorme que hace depender el esfuerzo cortante turbulento del *flujo medio* y por consiguiente constituye un paso adelante hacia la determinación de dicho flujo.

En cuanto a la dificultad todavía presente de conocer l, de nuevo se requieren hipótesis adicionales, que han sido propuestas de distintas maneras según el problema concreto. Aquí se analizará el trabajo de Prandtl para tuberías, en sus grandes rasgos.

10.4 Flujo turbulento según Prandtl

Consideremos un flujo turbulento limitado por una *pared.* Puede tratarse de un caso plano o del flujo en una tubería circular.

Por todo lo dicho anteriormente sabemos que el esfuerzo cortante total en un elemento de fluido es dado por

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy} + \rho\, l^2 \frac{d\tilde{u}_x}{dy} \left| \frac{d\tilde{u}_x}{dy} \right|, \tag{10-16}$$

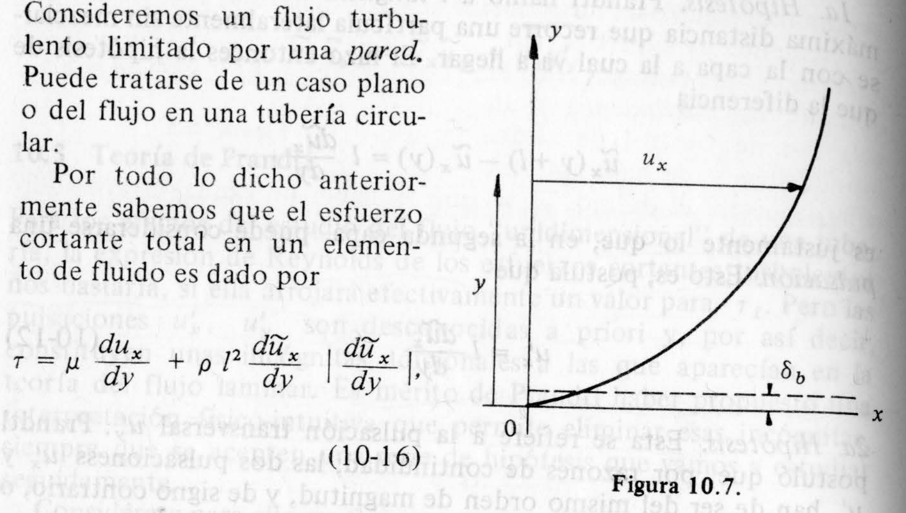


Figura 10.7.

donde están combinados los efectos debidos a la viscosidad y a la turbulencia. Por facilidad de notación escribamos u_x para la velocidad media temporal, que es la única que intervendrá en lo sucesivo. La expresión anterior se puede aproximar entonces por

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy} + \rho l^2 \frac{du_x}{dy} \left| \frac{du_x}{dy} \right| . \tag{10-17}$$

Ahora bien, dada la presencia de la pared, vamos a dividir el flujo en dos zonas: la *sub-capa laminar* y la *zona turbulenta.*

En la sub-capa laminar no hay turbulencia debido a la cercanía de la pared, como ya se ha dicho. Luego en esa zona, se tiene

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy} , \tag{10-18}$$

y el flujo es laminar.

En la zona turbulenta se tiene en general

$$\mu \frac{du_x}{dy} << \rho\, l^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 ,$$

y por consiguiente se podrá adoptar la expresión

$$\tau = \rho\, l^2 \frac{du_x}{dy} \left| \frac{du_x}{dy} \right| . \tag{10-19}$$

Es de observar que puede existir una tercera *zona,* llamada de *transición,* entre las dos zonas indicadas, en la cual los términos viscoso y turbulento son del mismo orden de magnitud. En este estudio dicha zona no se tomará en cuenta, como se explica más abajo.

Distribución de velocidades en la zona turbulenta

En esta zona, la magnitud del esfuerzo cortante es dada, según (10.19) por

$$\tau = \rho\, l^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 . \tag{10-20}$$

3a. Hipótesis. Para poder integrar esta ecuación, Prandtl adelanta la hipótesis que el esfuerzo cortante τ es *constante* en todo el seno del fluido e igual al valor que tiene en la pared[4]. Si se admite este supuesto y llamando τ_o el esfuerzo cortante en la pared, se tiene

$$du_x = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\, \frac{dy}{l} \tag{10-21}$$

Para integrar esta ecuación es necesario saber cómo varía l con la distancia a la pared.

4a. Hipótesis. Esta dificultad es levantada por Prandtl de nuevo, quien razona que la longitud de mezcla l ha de ser proporcional a la distancia y a la pared, por lo menos para distancias no muy grandes,

$$l = \kappa\, y, \tag{10-22}$$

donde κ es una constante que queda por determinar.

Extendiendo esta hipótesis a todo el fluido, puede entonces integrar (10.20), y obtiene

$$du_x = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\, \frac{dy}{\kappa y}$$

[4] Prandtl, L., *Führer durch die Strömungslehre,* 3 Aufl. (1949). Pág. 118.

o sea

$$\frac{u_x}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C_1.$$

Este resultado sugiere los siguientes comentarios y aclaraciones.

1. La hipótesis 3a. y 4a. no forman realmente parte de la teoría de la longitud de mezcla, sino que son adicionales a ella y no son las únicas posibles. Es interesante, sin embargo, que con lo burdas que son, conducen a resultados que concuerdan muy bien con la experiencia, como se discute más abajo.

2. Es evidente que la ecuación anterior no es válida para $y = 0$, por lo cual esta solución habrá de ser "empatada" con la correspondiente a la sub-capa laminar.

3. La cantidad $\sqrt{\tau_o/\rho}$ tiene dimensiones de velocidad. Se define entonces

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}, \tag{10-23}$$

y se llama *velocidad de corte*, con lo cual la distribución de velocidades en la zona turbulenta se escribe

$$\frac{u_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln y + C_1. \tag{10-24}$$

4. En las consideraciones anteriores se ha supuesto que la pared tiene una rugosidad nula. Es evidente que esta rugosidad habrá de ser considerada eventualmente.

Distribución de velocidades en la sub-capa laminar

Para esta zona supondremos también que $\tau = \tau_o$ en toda ella, mediante lo cual se tiene, (10.18),

$$\tau_0 = \rho\nu \frac{du_x}{dy} \tag{10-25}$$

o sea

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{\tau_0}{\rho\nu} = \frac{u^{*2}}{\rho} \tag{10-26}$$

Integrando y haciendo $u_x = 0$ para $y = 0$

$$\boxed{\frac{u_x}{u^*} = \frac{u^*}{\nu} y.} \tag{10-27}$$

Distribución de velocidades de Prandtl-von Karman

Las soluciones (10.24) y (10.27) tienen que empatar en el borde de la sub-capa laminar, esto es, para $y = \delta_b$. Luego se ha de cumplir que

$$\frac{u^*}{\nu} \delta_b = \frac{1}{\kappa} \ln \delta_b + C_1$$

o sea

$$C_1 = \frac{u^*}{\nu} \delta_b - \frac{1}{\kappa} \ln \delta_b.$$

Si llamamos

$$n = \frac{u^*}{\nu} \delta_b,$$

que es una constante adimensional, podemos escribir

$$C_1 = n - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{n\nu}{u^*} = n - \frac{1}{\kappa} \ln n - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\nu}{u^*},$$

Llevando este valor en (10-24) , y llamando $n - \frac{1}{\kappa} \ln n = A$,

$$\frac{u_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u^* y}{\nu} + A. \tag{10-30}$$

Este resultado depende de dos constantes, κ y A, que no pueden ser deducidas teóricamente.

Los resultados de la fórmula (10.30) fueron comparados por Nikuradse con numerosas mediciones experimentales, para varios números de Reynolds, y se encontró una coincidencia muy buena, cuando se da a las constantes κ y A los valores

$$\kappa = 0.4, \qquad A = 5.5, \tag{10-31}$$

con la cual (10.30) se escribe

$$\boxed{\frac{u_x}{u^*} = 2.5 \ln \frac{u^* y}{\nu} + 5.5,} \tag{10-32}$$

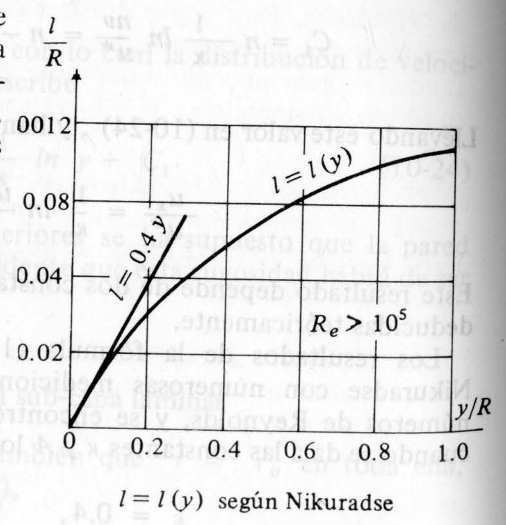
fórmula aplicable a toda tubería "lisa", es decir, donde la rugosidad de las paredes sea despreciable.

Como el lector se habrá dado cuenta, el trabajo de Prandtl hasta aquí presentado se basa en un feliz equilibrio entre consideraciones

teóricas y visiones intituivas, ambas controladas por una serie enorme de experimentos. Su método y la escuela de pensamiento que él fundó se ha llamado por esta razón, semi-empírica o también fenomenológica. Otros resultados de esta escuela serán presentados en secciones subsiguientes, para quien quiera profundizar en este problema de la turbulencia aplicada. A continuación se darán, sobre todo, aquellos detalles que son útiles para el trabajo diario del ingeniero.

Es oportuno hacer notar también los inconvenientes que presenta la relación (10.32). Del punto de vista práctico, la presencia de la función logaritmo es incómoda para trabajos de rutina. Del punto de vista teórico, aparte de las reservas que se puedan tener sobre las distintas hipótesis de Prandatl, (reservas que serán discutidas más adelante), se observa que no sólo en la pared dicha fórmula es incorrecta, habiendo de ser sustituida por (10.27) como ya se ha dicho, sino que en el centro de la tubería, la pendiente de $u_x = u_x(y)$ no es nula. La existencia de un punto anguloso en el centro ha hecho dudar mucho de la verosimilidad de las hipótesis de Prandtl.

Un hecho más contundente todavía es la variación de la longitud de mezcla con la distancia a la pared. Según (10.21), ésta es lineal. Los resultados experimentales de Nikuradse, sin embargo, indican proporcionalidad sólo en una zona muy vecina de la pared. También sobre este punto regresaremos más tarde.



$l = l(y)$ según Nikuradse

Figura 10.8.

Cabe señalar, por otra parte, que existe otra escuela de pensamiento en cuanto al problema de la turbulencia se refiere, que plantea el problema de las pulsaciones como un *fenómeno estadístico* y que ha florecido en una considerable literatura científica. Desgraciadamente este camino todavía no ha conducido a resultados aplicables técnicamente[5].

[5] J. O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill. G. K. Batchelor, *The theoy of homogeneous Turbulence*, Cambridge U. P.

Espesor de la sub-capa laminar

Según la definición dada, el espesor δ_b de la sub-capa laminar es aquel en donde la velocidad en la subcapa y en el flujo turbulento principal son iguales, (10.28). Si representamos gráficamente la distribución de velocidades en ambas zonas, el espesor δ_b queda definido por la intersección C de las curvas dadas por (10.27) y (10.32).

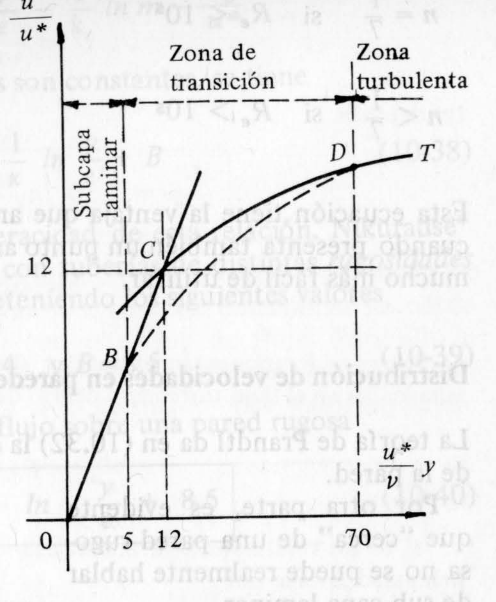


Figura 10.9.

La abscisa de C es dada por la ecuación

$$\frac{u^*\delta_b}{\nu} = 2{,}5\, ln \frac{u^*\delta_b}{\nu} + 5{,}5$$

de donde

$$\frac{u^*}{\nu}\delta_b \cong 12. \qquad (10\text{-}33)$$

En realidad, como ya se apuntó anteriormente, existe una *zona de transición* en la cual tanto la viscosidad como la turbulencia influyen en la distribución de velocidades.

La verdadera distribución sería más bien la curva OBDT. En las deducciones de Prandtl, tal como han sido presentadas aquí, no se ha tomado en cuenta esta transición, cuyos límites se definen aproximadamente como

$$5 < \frac{u^*}{\nu}\, y < 70 \qquad (10\text{-}34)$$

El lector podrá apreciar la magnitud del error.

Fórmula empírica de Prandtl

Conviene mencionar por cuanto es usada frecuentemente, una relación empírica que propuso Prandtl en base a los trabajos de Blasius, como ley de distribución de las velocidades.

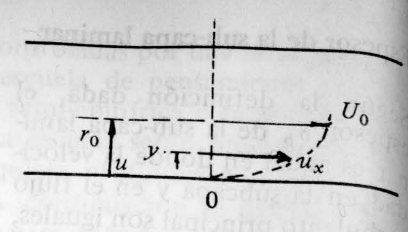
Esta ley es dada por

$$\boxed{\frac{u_x}{U_0} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^n} \qquad (10\text{-}35)$$

donde

$$n = \frac{1}{7} \quad \text{si} \quad R_e < 10^5$$

$$n < \frac{1}{7} \quad \text{si} \quad R_e > 10^5$$



Esta ecuación tiene la ventaja que arroja $u_z = O$ para $y = 0$ y, aún cuando presenta también un punto anguloso en el centro del tubo, es mucho más fácil de utilizar.

Distribución de velocidades en paredes rugosas

La teoría de Prandtl da en (10.32) la distribución de velocidades lejos de la pared.

Por otra parte, es evidente que "cerca" de una pared rugosa no se puede realmente hablar de sub-capa laminar.

Introduzcamos el concepto de tamaño medio ϵ, medido en milímetros, por ejemplo, y sea $y_p = m\epsilon$ la distancia a partir de la cual se puede suponer que ya la rugosidad no perturba el flujo turbulento. La constante m es "factor de forma" que toma en cuenta la "estructura" de la rugosidad.

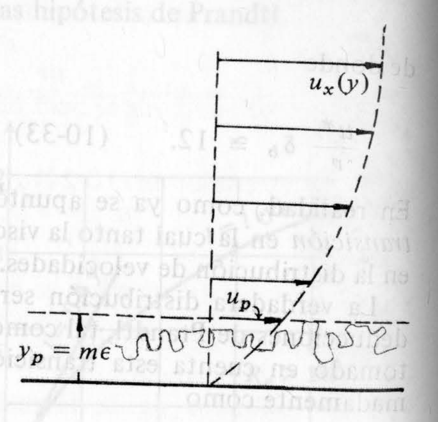


Figura 10.10.

Se ha de cumplir entonces

$$y = y_p \Longrightarrow u_x = u_p \tag{10-37}$$

es decir, que la velocidad tiene para $y = y_p$ un cierto valor llamado "velocidad de pared".

Llevando los valores de (10.37) en (10.30), se tiene

$$\frac{u_p}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln m\epsilon + A.$$

Luego restando de la propia (10.30),

$$\frac{u}{u^*} - \frac{u_p}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{m\epsilon}$$

de donde

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\epsilon} - \frac{1}{k} \ln m - \frac{u_p}{u^*}$$

y como los dos últimos términos son constantes, se tiene

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\epsilon} + B \tag{10-38}$$

La experiencia demuestra la veracidad de esta relación. Nikuradse[6] efectuó numerosas mediciones con tuberías de distintas *rugosidades articiciales* (granos de arena), obteniendo los siguientes valores

$$\kappa = 0.4 \quad \text{y} \quad B = 8.5 \tag{10-39}$$

Luego se puede escribir para el flujo sobre una pared rugosa

$$\boxed{\frac{u}{u^*} = 2.5 \ln \frac{y}{\epsilon} + 8.5} \tag{10-40}$$

Velocidad media en una tubería lisa

Volviendo a las tuberías lisas, veamos, como ejemplo, la utilización de (10.32) para el cálculo del caudal y de la velocidad media en la tubería. El resultado a encontrar será utilizado en lo que sigue.

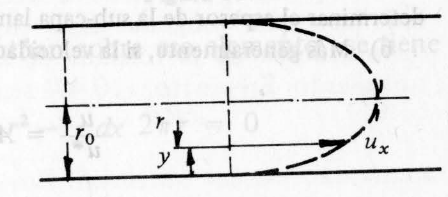


Figura 10.11.

Recordando la definición de caudal[7] en volumen (3.10),

$$\dot{V} = \int_{(A)} u_x \, dA = \int_0^{r_0} 2\pi r u_x \, dr$$

$$= 2\pi u^* \int_0^{r_0} r \left(2.5 \ln \frac{u^*(R - r)}{\nu} + 5.5\right) dr$$

$$= \pi r_0^2 u^* \left(2.5 \ln \frac{u^* r_0}{\nu} + 1.75\right)$$

[6] Nikuradse, *Verein Deutscher Ingenieure* (VDI), Forschung Heft, 361 (1933).

[7] El error cometido al no tomar en cuenta la sub-capa laminar y utilizar (10-32) desde la propia pared se considera despreciable.

Recordando ahora la expresión de la velocidad media, que llamaremos simplemente:

$$U = \frac{\dot{V}}{\pi r_0^2}$$

tendremos

$$\boxed{\frac{U}{u^*} = 2.50 \; ln \frac{u^* r_0}{\nu} + 1.75} \qquad (10\text{-}41)$$

Ejercicios

1. Por consideraciones dimensionales, dedúzcase que la ley de distribución de velocidades en el flujo turbulento dentro de una tubería, puede expresarse por

$$\frac{u}{u^*} = F\left(\frac{y\,u^*}{\nu}\right)$$

2. a. Si los resultados experimentales indican que el flujo turbulento lejos de una pared es dado por

$$\frac{u}{u^*} = 8.7\left(\frac{y\,u^*}{\nu}\right)^{1/7}$$

determinar el espesor de la sub-capa laminar que le está asociada.

b) Más generalmente, si la velocidad es del tipo

$$\frac{u}{u^*} = A\left(\frac{y\,u^*}{\nu}\right)^n$$

determinar el espesor de la sub-capa laminar.

Respuesta: $\delta_b = 12.5\frac{\nu}{u^*}$, $\quad \delta_b = A^{\frac{1}{1-n}}\frac{\nu}{u^*}$

En una tubería con flujo turbulento se utiliza a menudo la distribución de Prandtl:

$$u = U_0 \left(\frac{y}{r_0}\right)^n$$

a) ¿Cuánto vale U_0 en términos de los valores experimentales A, u^* y r, definidos en el ejercicio anterior?

b) Calcular la velocidad media correspondiente.

Respuesta: a) $U_0 = \dfrac{A u^{*1+n}\, r_0^n}{\nu^n}$

b) $U = \dfrac{2U_0}{(n+1)(n+2)} = A\left(\dfrac{r_0}{\nu}\right)^n \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}\, u^{*1+n}$

10.5 Pérdida de carga en una tubería

Una de las razones prácticas que condujeron al estudio detallado de la turbulencia en una tubería, fue el interés en determinar las pérdidas de carga que se producen con este tipo de flujo. Para ello se hacía necesario poder evaluar el esfuerzo cortante τ_0 que se produce en la pared del tubo, ya que conocido este valor, se puede calcular el gradiente de presión y por ende la pérdida de carga.

En efecto, consideremos una tubería horizontal y un elemento cilíndrico de radio r y longitud dx colocado simétricamente con respecto al eje del tubo.

Figura 10.12.

Suponiendo un flujo de velocidad media constante y considerando todas las fuerzas que actúan sobre ese elemento, se tiene

$$p\,\pi\,r^2 - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\right)\pi r^2 - \tau\,dx\;2\pi r = 0$$

y simplificando

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \tau\frac{2}{r} = 0,$$

o sea

$$\tau = \frac{Kr}{2}, \qquad (10\text{-}42)$$

donde K es el gradiente de presión (8.19)

$$K = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{l}. \qquad (10\text{-}43)$$

Haciendo además $r = \frac{D}{2}$, se tiene el esfuerzo cortante en la pared

$$\tau_0 = \frac{DK}{4} \qquad (10\text{-}44)$$

Recordando que la pérdida de carga es, (8.42)

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} \tag{10-45}$$

se tiene, recordando también (10.23)

$$h_f = \frac{Kl}{\gamma} = \frac{4\,\tau_0}{D\gamma}\,l = \frac{4\,u^{*2}}{Dg}\,l \tag{10-46}$$

Se ve pues, que la determinación del *esfuerzo cortante* en la pared permite encontrar la *pérdida de carga,* la cual además es también expresable en función de la velocidad de corte.

Fórmula de Darcy-Weisbach

Si ahora se sustituye u^* en función de la velocidad media U, (10.41), se tiene

$$h_f = 8\,\frac{l}{D}\,\frac{u^{*2}}{2g} = \frac{8}{\left(2.5\,ln\,\frac{u^*r_0}{\nu} + 1.75\right)^2}\,\frac{l}{D}\,\frac{U^2}{2g}. \tag{10-47}$$

Esta expresión, deducida a partir de la fórmula de Prandtl-von Kárman sin ninguna otra hipótesis adicional, constituye una *demostración* de la fórmula de *Darcy-Weisbach* (8.46) para el caso turbulento. En efecto, (10.47) se escribe

$$\boxed{h_f = f\,\frac{l}{D}\,\frac{U^2}{2g}}, \tag{10-48}$$

con el coeficiente de fricción

$$f = \frac{8}{\left(2.5\,ln\,\frac{u^*r_0}{\nu} + 1.75\right)^2}, \tag{10-49}$$

para el flujo turbulento en tuberías lisas.

Coeficiente de fricción

La teoría de Prandtl nos ha permitido hasta ahora, encontrar una demostración de la fórmula descubierta empíricamente por Darcy y Weisbach, y al mismo tiempo ha proporcionado una expresión del coeficiente de fricción para tuberías lisas.

Esa expresión, (10.49), puede y debe ser mejorada, con el objeto de eliminar u^* en ella.

En efecto, sacando la raíz cuadrada e invirtiendo

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{2.5\,ln\,\frac{u^*r}{\nu} + 1.75}{\sqrt{8}}. \tag{10-50}$$

Ahora bien, comparando (10.46) con (10.48), se tiene

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{f}\,\frac{U}{\sqrt{8}}, \tag{10-51}$$

de donde

$$\frac{u^*r_0}{\nu} = \sqrt{f}\,\frac{U}{2\sqrt{8}}\,\frac{D}{\nu} \tag{10-52}$$

Si observamos que UD/ν es el número de Reynolds del flujo en la tubería, (10.50) se escribe

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\left(2.5\,ln\,\frac{R_e\sqrt{f}}{2\sqrt{8}} + 1.75\right)$$

$$= 0.884\,ln\,R_e\,\sqrt{f} - 0.95. \tag{10-53}$$

Esta expresión, corregida ligeramente mediante valores experimentales directos

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86\,ln\,R_e\,\sqrt{f} - 0.8}, \tag{10-54}$$

es la que será usada en los cálculos relativos a flujo turbulento en tuberías lisas.

Los resultados anteriores han sido totalmente verificados en miles de ensayos sobre diversas tuberías. Aquí se puede apreciar el éxito de la escuela de Prandtl en toda su magnitud.

Sólo hemos presentado una deducción completa para el caso de las tuberías lisas siguiendo estrictamente las hipótesis de Prandtl, a modo de ilustración precisa de los métodos empleados. Hubo que estudiar también el caso de las paredes rugosas, tanto con rugosidad artificial

(Nikuradse) como con rugosidad natural (Colebrook et al)[8]. Algunos de los análisis efectuados para estos fines serán presentados en las secciones últimas del capítulo.

Habiendo presentado las líneas generales del método, se pasará a continuación a dar los resultados finales de todo el problema, y a ilustrar mediante ejemplos cómo se los aplica al "cálculo" de tuberías.

Ejercicios

1. Demostrar que en una tubería, ya sea el flujo laminar o turbulento, el coeficiente de fricción es dado por

$$f = 8 \left(\frac{u^*}{U}\right)^2$$

2. En una tubería de diámetro D, donde el flujo es dado por

$$\frac{u}{u^*} = A \left(\frac{yu^*}{\nu}\right)^n$$

determinar el coeficiente de fricción f y el esfuerzo cortante τ_0 en la pared.

Evaluar f y τ_0 cuando $A = 8.7$ y $n = 1/7$.

Respuesta: $$f = 2^{\frac{5n+1}{1+n}} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{A}\right]^{\frac{2}{1+n}} R_e^{-\frac{2n}{1+n}}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{A^{\frac{2}{1+n}}} \rho U_0^2 \left(\frac{U_0 r_0}{\nu}\right)^{-\frac{2n}{n+1}}$$

donde

$$R_e = \frac{U_0 D}{\nu}, \quad r_0 = \frac{D}{2}$$

y U_0 es la velocidad máxima.

$$\tau_0 = 0.0228 \, \rho U_0^2 \left(\frac{U_0 r_0}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}.$$

[8] Ver H. Rouse. *Elementary Mechanics of Fluids*, Wiley.

10.6 Cálculo de tuberías

El "cálculo" de una *tubería* significa la determinación de una cierta cantidad de parámetros del flujo en esa tubería partiendo de otros que son conocidos. Así por ejemplo, se puede pedir el diámetro de la tubería sabiendo que tiene que circular un caudal dado y que se dispone de una bomba de potencia conocida, etc. En esta sección no se va a considerar el problema *completo* del cálculo de una tubería, pues ciertos parámetros habrán de ser determinados usando leyes cuyo estudio no es el propósito de este texto, por ejemplo el espesor de la pared de la tubería, las conexiones, etc. que están regidas por leyes de la Resistencia de Materiales, normas de fabricación, etc. Ciertos fenómenos como el flujo no permanente en la tubería introduce nuevos criterios para diseño de la misma: así por ejemplo, al cerrarse una llave de paso se genera un golpe de ariete, esto es, un súbito incremento de la presión, que ha de ser motivo de un estudio mucho más complejo del que se está haciendo en este capítulo.

Para nosotros "calcular" una tubería, será por el momento, utilizar la ecuación de Darcy-Weisbach (10.48) para determinar unos parámetros, conocidos otros, y posteriormente, la ecuación de Bernoulli generalizada (4.48), para predecir las condiciones en una sección del tubo, conocidas éstas en otra sección. Se harán varios ejemplos de los diversos casos que se presentan.

Ahora bien, para utilizar la ecuación de Darcy-Weisbach habrá de determinarse el coeficiente de fricción f. Este coeficiente ha sido calculado para el caso de un *flujo laminar*, esto es cuando $R_e <$ 2,000, y vale (8.45)

$$f = \frac{64}{R_e}. \tag{10-55}$$

Para el flujo turbulento en una tubería de *pared lisa* hemos visto que f resulta calculable mediante la expresión (10.54)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.86 \; ln R_e \sqrt{f} - 0{,}8. \tag{10-56}$$

Si la pared es rugosa, se puede partir de la relación (10.36) y seguir los mismos pasos que se dieron para el caso anterior. Un estudio más completo de este asunto se hará al final del capítulo, en una sección que puede leer la persona interesada. Aquí vamos a *resumir los resultados,* con especial referencia al llamado diagrama de Moody[9], que

[9] L. F. Moody, *Transactions American Society of Mechanical Engineers* (1944) . Pág. 110.

agrupa en forma gráfica fácilmente utilizable, todos los casos que se pueden presentar.

Sin embargo, cabe observar que para entender lo que pasa en una tubería rugosa, hay que considerar el espesor δ_b de la sub-capa laminar comparado con el tamaño de la rugosidad ϵ:

1. Si el tamaño de la rugosidad es mucho menor que el espesor de la sub-capa laminar, concretamente si

$$\epsilon < \frac{2}{5}\,\delta_b, \tag{10-57}$$

el flujo turbulento en la tubería está "aislado" de las rugosidades y la pared se comporta como si fuera lisa.

Entonces se puede calcular f mediante (10.56), es decir, depende sólo del número de Reynolds.

2. Si el tamaño de la rugosidad es mucho mayor que la sub-capa

$$\epsilon > 6\,\delta_b \tag{10-58}$$

el coeficiente de fricción es dado por

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 0.86\,ln\,\frac{\epsilon}{D} \tag{10-59}$$

esto es sólo depende de la rugosidad.

3. Entre esos extremos existe una zona intermedia.

$$\frac{2}{5}\,\delta_b < \epsilon < 6\,\delta_b \tag{10-60}$$

en la cual las características del flujo turbulento dependen tanto de la rugosidad como del espesor de la sub-capa, es decir, del número de Reynolds.

En este caso, el coeficiente de fricción es dado por la fórmula de Colebrook[10].

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -\,0.86\,lu\,\left(\frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{R\sqrt{f}}\right) \tag{10-61}$$

Estos resultados están resumidos en el diagrama de Moody, que se explica por sí mismo.

---

[10] C. F. Colebrook: *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Londres, Vol. II (1938-39), pág. 133 a 156.

Para utilizar el diagrama se hace necesario, dada una tubería, conocer el valor de la rugosidad ϵ o de la rugosidad "equivalente" que tendría si ésta fuese uniforme.

Los valores comúnmente aceptados se indican en la tabla a continuación:

Tabla 10.1

VALORES DE ϵ (*en mm*)

Material			
Vidrio, latón estirado, cobre, plomo	0		(lisa)
Acero o hierro forjado	0.045	a	0.05
Hierro galvanizado	0.15		
Fundición asfaltada	0.12		
nueva	0.3	a	1.0
oxidada	1.0	a	1.5
con deposiciones	1.5	a	3.0
Cemento pulido	0.3	a	0.8
Cemento natural	1.0	a	2.0
Concreto armado	0.3	a	3.0
Madera	0.2	a	0.9
Ladrillos	1.2	a	2.5
Pared de piedra, acabada	1.5	a	3.0
Pared de piedra, natural	8	a	15
Acero remachado	0.9	a	9.0

Con los valores aquí anotados y el diámetro de la tubería se calcula la *rugosidad relativa*

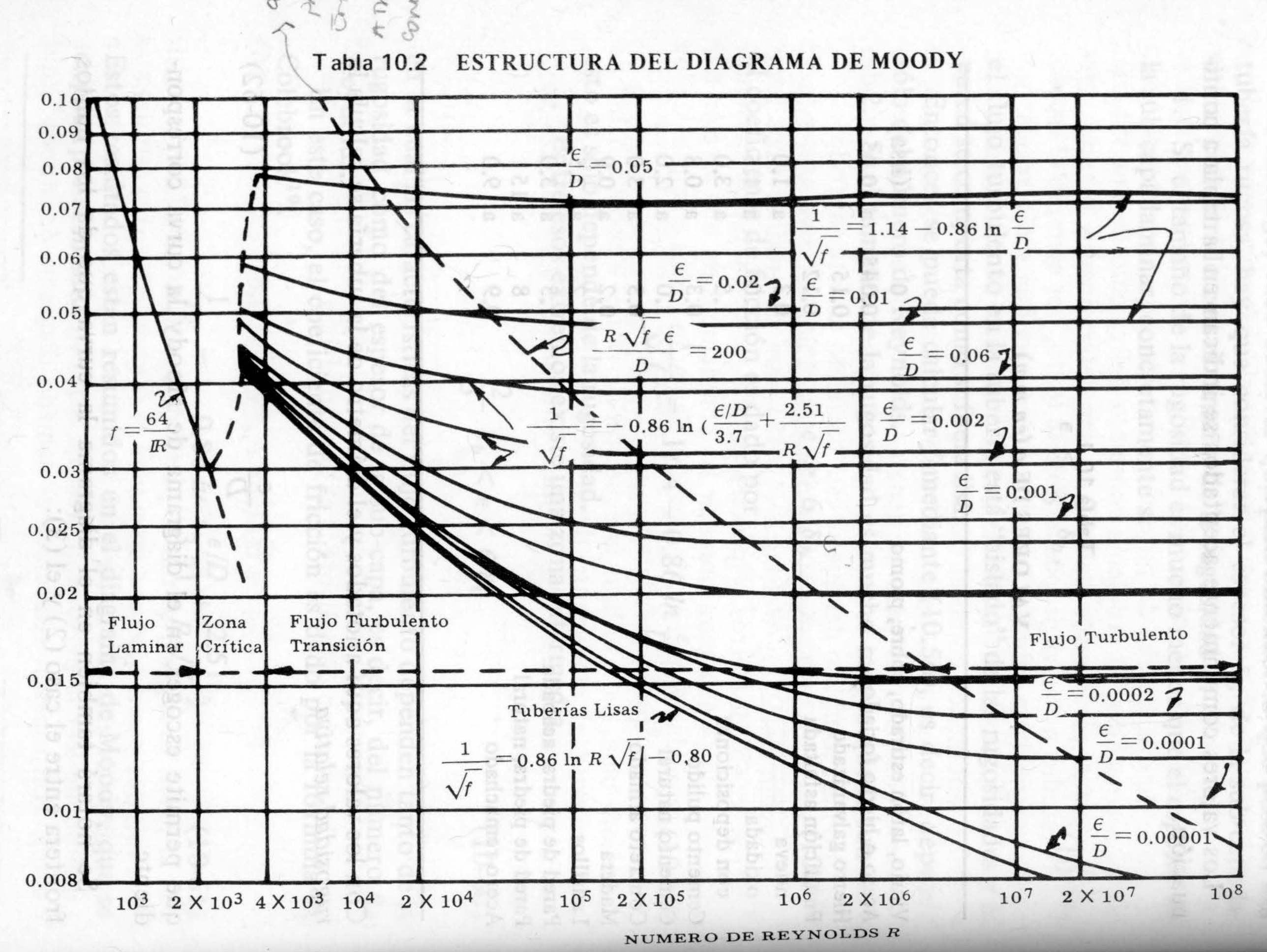
$$\frac{\epsilon}{D} \tag{10-62}$$

que permite escoger en el diagrama de Moody la curva correspondiente.

Se notará también en el diagrama la curva que da los puntos frontera entre el caso (2) y el (3):

$$\frac{R\sqrt{f}\,\epsilon}{D} = 200. \tag{10-63}$$

Tabla 10.2 ESTRUCTURA DEL DIAGRAMA DE MOODY



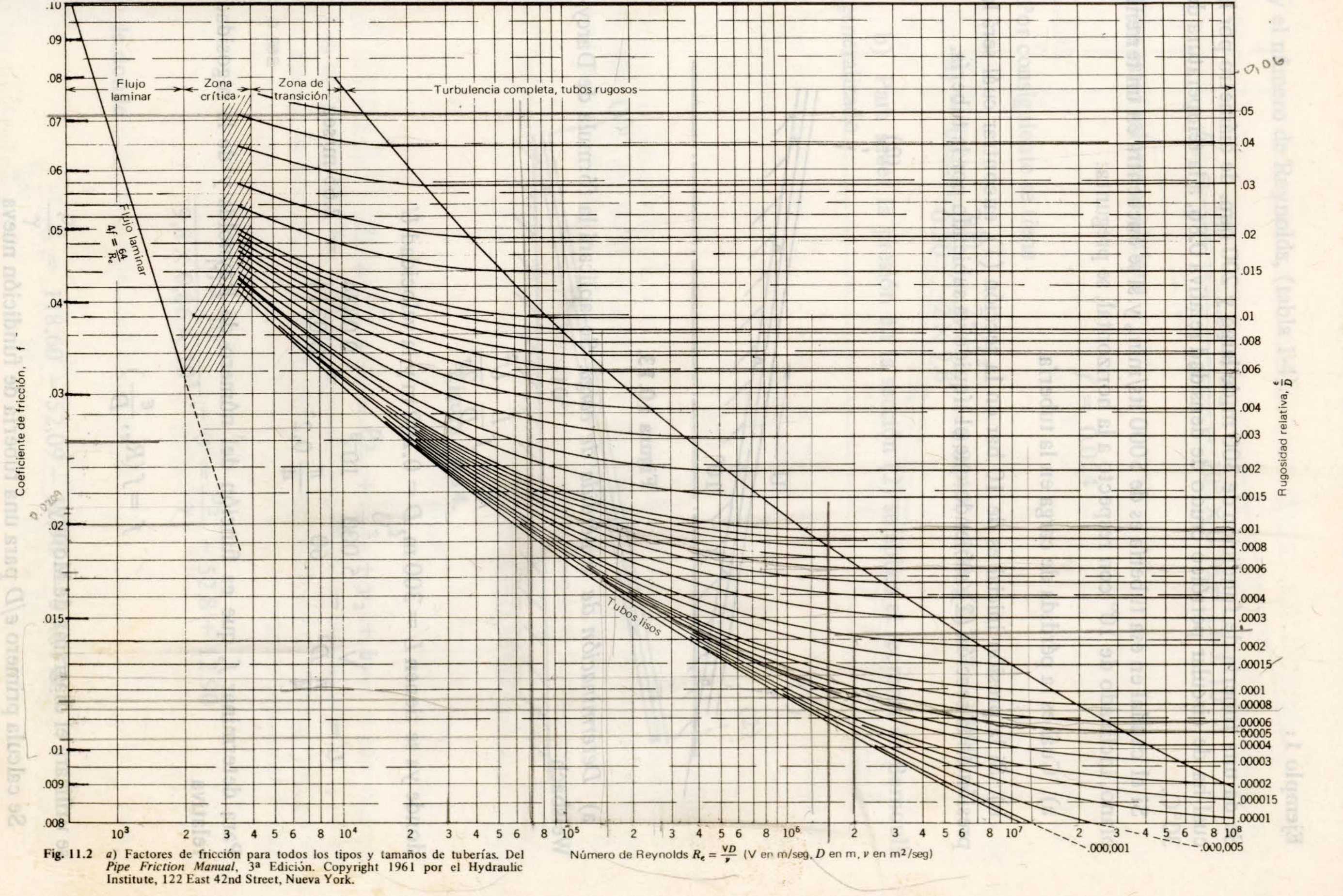


Fig. 11.2 *a*) Factores de fricción para todos los tipos y tamaños de tuberías. Del *Pipe Friction Manual*, 3ª Edición. Copyright 1961 por el Hydraulic Institute, 122 East 42nd Street, Nueva York.

Ejemplo 1:

Se da una tubería de fundición de 300 m. de largo y 200 mm. de diámetro por la cual ha de circular petróleo crudo de densidad relativa 0.86, a la temperatura de 30°C.

Si el caudal en esa tubería es de 5000 lts/min., y si se encuentra en un terreno plano, inclinado de 10° con respecto a la horizontal, se pregunta:

a) Cuál es la pérdida de carga en la tubería.

b) Si la presión inicial es de 10 bar en la sección (1), encontrar cuál será la presión en la sección (2), sabiendo que el líquido va subiendo por la tubería.

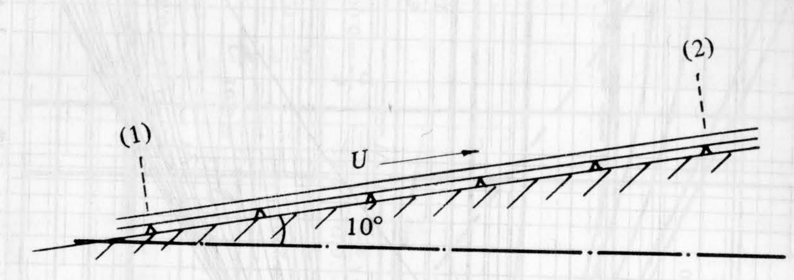


Figura 10.13.

a) *Determinación de la pérdida de carga.* Se aplicará la fórmula de Darcy-Weisbach

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{U^2}{2g}$$

donde ya se tienen $L = 300$ m, $D = 0.200$ m y la velocidad U

$$U = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{5,000}{60}\;\frac{10^{-3}}{\frac{\pi}{4}0.2^2} = \frac{0.0834}{0.0314} = 2.65 \text{ m/seg}$$

Para determinar f, que es función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa

$$f = f\left(R_e, \frac{\epsilon}{D}\right)$$

se utilizará el diagrama de Moody.

Se calcula primero ϵ/D para una tubería de fundición nueva

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.3 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} = 0.0015$$

y el número de Reynolds, (tabla 1-4).

$$R_e = \frac{UD}{\nu} = \frac{2.65 \times 0.2}{7 \times 10^{-6}} = 10^5 \times 0.76 = 7.6 \times 10^4$$

Para estos valores se obtiene

$$f = 0.024$$

Por consiguiente se tiene

$$h_f = 0.024\,\frac{300}{0.20} \times \frac{2 \cdot 65^2}{2 \times 9.8} = 0.024 \times 1500 \times 0.357 = 12.90 \text{ m.}$$

b) Para saber la presión en la sección (2) se aplica el teorema de Bernoulli generalizado

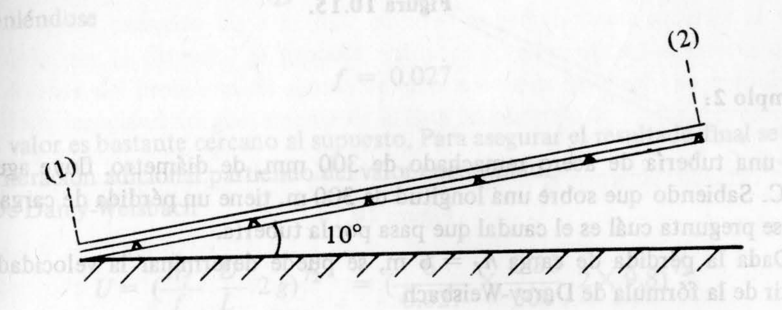


Figura 10.14.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + y_2 + h_f$$

o sea

$$\frac{10 \times 10^5}{9{,}8 \times 0{,}86 \times 10^3} + 0 = \frac{p_2}{\gamma} + 52{,}8 + 12.90$$

de donde

$$\frac{p_2}{\gamma} = 118.60 - 52.09 - 12.90 = 53.61 \text{ m.}$$

o sea

$$p_2 = 53.61 \times 9800 \times 0.86 \times 10^{-5} = 4.52 \text{ bar}$$

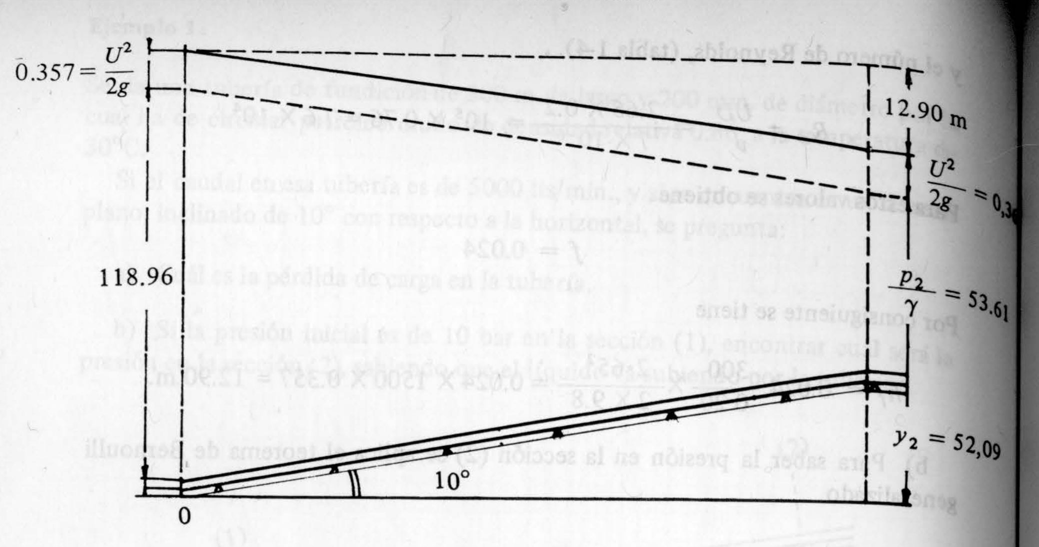


Figura 10.15.

Ejemplo 2:

Por una tubería de acero remachado de 300 mm. de diámetro. fluye agua de 15°C. Sabiendo que sobre una longitud de 300 m. tiene un pérdida de carga de 6 m., se pregunta cuál es el caudal que pasa por la tubería.

Dada la pérdida de carga $h_f = 6$ m, se puede determinar la velocidad U a partir de la fórmula de Darcy-Weisbach

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{U^2}{2g}$$

siempre que se conozca el coeficiente de fricción. Puesto que f depende a su vez de U, se hace necesario proceder por tanteo, utilizando un valor promedio de f, de los que aparecen en el diagrama de Moody. En el presente caso se tomará $f = 0.03$. Entonces se tiene

$$6 = 0.03\,\frac{300}{0.30} \times \frac{U^2}{2 \times 9.8}$$

o sea

$$U^2 = \frac{6 \times 0.30 \times 2 \times 9.8}{0.03 \times 300} = \frac{12 \times 9.8}{30} = 3.92\frac{\text{m}^2}{\text{seg}^2}$$

luego

$$U = 1.98 \text{ m/seg.}$$

Con este valor de la velocidad, se evalúa ahora el número de Reynolds

$$R_e = \frac{Ud}{\nu} = \frac{1.98 \times 0.30}{1.20 \times 10^{-6}} = 4.95 \times 10^5$$

ya que la viscosidad del agua a 15°C es de, (tabla 1-4)

$$\nu = 1.20 \times 10^{-6}\,\frac{\text{m}^2}{\text{seg}}.$$

Para leer en el diagrama de Moody es necesario además, tener la rugosidad. Se tomará para el presente caso $\epsilon = 1$ mm. Esto es, una rugosidad relativa de

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{1}{300} = 0.0033.$$

Con los valores de R_e y de $\frac{\epsilon}{D}$ se busca en el diagrama de Moody el valor de f, obteniéndose

$$f = 0.027$$

Este valor es bastante cercano al supuesto. Para asegurar el resultado final se hace una iteración adicional partiendo del valor encontrado.

De Darcy-Weisbach

$$U = \left(\frac{h_f}{f}\,\frac{D}{L}\,2\,g\right)^{1/2} = \left(\frac{6}{0.027} \times \frac{0.30}{300}\,2 \times 9.8\right)^{1/2}$$

$$= 2.08 \text{ m/seg.}$$

El número de Reynolds es entonces

$$R_e = \frac{2.08 \times 0.30}{1.2 \times 10^{-6}} = 5.2 \times 10^5$$

que conduce a

$$f = 0.026$$

Luego, el valor de la velocidad es aceptable

$$U = 2.08 \text{ m/seg,}$$

de donde el caudal

$$\dot{V} = UA = 2.08 \times \frac{\pi}{4} \times 0{,}3^2 = 0.147\frac{\text{m}^3}{\text{seg}} = 147 \text{ lts/seg.}$$

Ejemplo 3:

Determine el diámetro de una tubería de acero comercial que debe transportar 2000 lts/min. de un petróleo de viscosidad $\nu = 10^{-5}\ m^2/seg$ y de peso específico relativo 0.80, entre dos puntos distantes de 500 m. El punto de llegada se encuentra a 50 m. por encima del nivel del punto de partida y la pérdida de presión entre los dos puntos no ha de ser superior a 7.5 bar.

Escribiendo el teorema de Bernoulli generalizado entre los puntos (1) y (2)

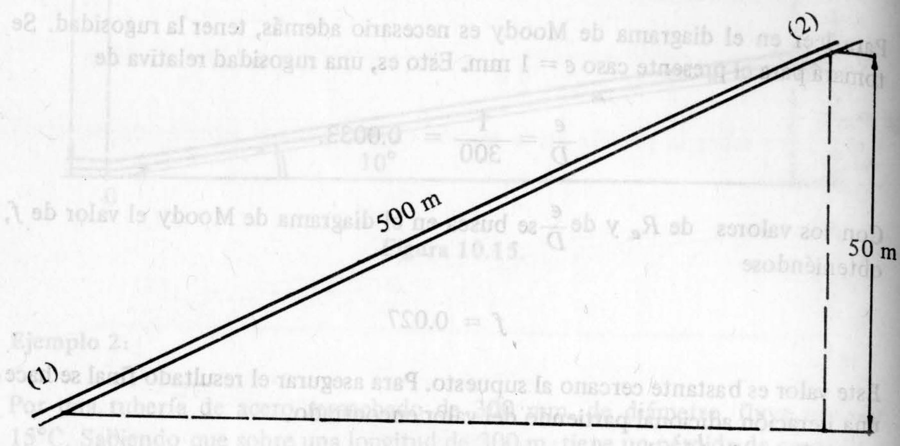


Figura 10.16.

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} + y_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + y_2 + h_f$$

de donde, en el presente caso

$$h_f = \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} + y_1 - y_2 = \frac{7.5 \times 10^5}{9800 \times 0.8} - 50 = 95.9 - 50 = 45.9 \text{ m}$$

En este caso hay que determinar el diámetro. Esto es, hay que diseñar el tubo. Un posible procedimiento de tanteo consiste en lo siguiente:

De la ecuación de Darcy-Weisbach se despeja el diámetro en función del caudal, es decir de

$$\dot{V} = U \frac{\pi}{4} D^2,$$

se obtiene U y se lleva en

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} = f \frac{L}{D} \frac{\dot{V}^2}{(\frac{\pi}{4})^2 D^4} \cdot \frac{1}{2g};$$

de donde

$$D^5 = \frac{8 L\dot{V}^2}{h_f\, g\, \pi^2}\ f$$

Observando que el rango de variación de f no es muy grande se supone un valor promedio de f, de donde se obtiene un valor aproximado del diámetro. Este valor le permite al diseñador hacer una primera escogencia del posible diámetro comercial que conviene al problema.

Una lista de diámetros comerciales usuales se provee a continuación: en pulgadas

1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 3/4, 1″

1 1/4, 1 1/2, 2, 2 1/2, 3, 3 1/2, 4

5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 24, 30.

Con el valor *escogido de esta lista* como el inmediatamente *superior* al valor obtenido por la fórmula, se procede entonces a una verificación directa de las condiciones del problema. Si alguna de ellas no queda satisfecha se modifica el diámetro escogiéndolo nuevamente de la lista propuesta o de la que represente el material realmente asequible en el mercado.

Con el ejemplo propuesto, el diseño proseguiría de la siguiente manera:

Caudal $\dot{V}$ = 2000 lts/mn = 33.3 lts/seg = 0.0333 m³/seg.

Suponiendo $f = 0.03$, el diámetro habría de ser

$$D = \left(\frac{8 L\dot{V}^2}{h_f\, g\, \pi^2} f\right)^{1/5} = \left[\frac{8 \times 500 \times (3.33)^2 \times 10^{-4}}{45.9 \times 9{,}8 \times 9{,}9}\right]^{1/5}$$

$$= (9.96 \times 10^{-4} \times 0.03)^{1/5} = 12.45 \text{ cm} < 12.7 \text{ cm} = 5''$$

Si se adopta el diámetro de 5″ como primera aproximación, se pueden calcular las demás características del flujo y ver si es un diámetro aceptable.

Velocidad:

$$U = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4} D^2} = \frac{0.0333}{\frac{\pi}{4}(0.127)^2} = \frac{0.0333}{\frac{\pi}{4} \times 0.0161} = 2.63 \text{ m/seg.}$$

Número de Reynolds:

$$R_e = \frac{UD}{\nu} = \frac{2.63 \times 0.127}{10^{-5}} = 3.34 \times 10^4$$

Rugosidad relativa. Tomando para el acero comercial una rugosidad de $\epsilon = 0.05$ mm, se tiene

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.005}{12.7} = 0.00039$$

En el diagrama de Moody se obtiene $f = 0.024$.

La pérdida de carga será

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{U^2}{2g} = 0.024\,\frac{500}{0.127} \times \frac{(2.63)^2}{2 \times 9.8}$$

$$= 0.024 \times 3940 \times 0.354 = 33.5 \text{ m}.$$

Esta pérdida de carga es menor que la máxima aceptable (45.9 m). Por consiguiente un diámetro de 5″ cumple con todas las condiciones.

Sin embargo, como la pérdida de carga real, $h_f = 33.5$ m está 10 m. por debajo del límite superior aceptable, puede pensarse en probar un diámetro menor, y tener así un segundo tanteo.

Tómese pues $D = 4''$ que es el diámetro comercial inmediatamente inferior. Se tiene sucesivamente

Diámetro: $D = 4'' = 10.16 \text{ cm} = 0.1016 \text{ m}$

Area: $A = \frac{\pi}{4} \times 0.1016^2 = 0.0081 \text{ m}^2$

Velocidad:

$$U = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{0.0333}{0.0081} = 4.1 \text{ m/seg.}$$

Número de Reynolds:

$$R_e = \frac{UD}{\gamma} = \frac{4.1 \times 0.1016}{10^{-5}} = 4.15 \times 10^4$$

Rugosidad relativa:

$$\frac{\epsilon}{D} = \frac{0.005}{10} = 0.0005$$

Coeficiente de fricción (del diagrama de Moody):

$$f = 0.023$$

Pérdida de carga:

$$h_f = 0.023\,\frac{L}{D}\,\frac{U^2}{2g} = 0.023\,\frac{500}{0.10} \times \frac{4.1^2}{2 \times 9.8}$$

$$= 0.023 \times 5000 \times 0.86 = 99 \text{ m}$$

Este valor se encuentra muy por encima del aceptable. El diámetro es ahora demasiado pequeño. El valor final del diámetro ha de ser pues

$$D = 5'' = 12.7 \text{ cm.}$$

10.7 Pérdidas menores

Se llaman así, en un sistema hidráulico, las pérdidas de carga debidas a los codos, expansiones y contracciones del diámetro de la tubería boquillas, etc.

Estas pérdidas no son deducibles en general en forma teórica y se expresan en términos de un coeficiente que se determina experimentalmente.

Una excepción interesante en la cual sí se puede hacer una deducción la constituye la expansión brusca de diámetro. Su estudio permitirá encontrar la expresión general de las pérdidas "menores". Cabe subrayar que estas pérdidas no son necesariamente menores, a pesar de su nombre, comparadas con la h_f de fricción en una tubería; por ello sólo se podrán despreciar cuando efectivamente se las haya evaluado y comparado con la pérdida en la tubería.

Por otra parte, las pérdidas en boquillas y orificios fueron consideradas ya en la Sección 4.7.

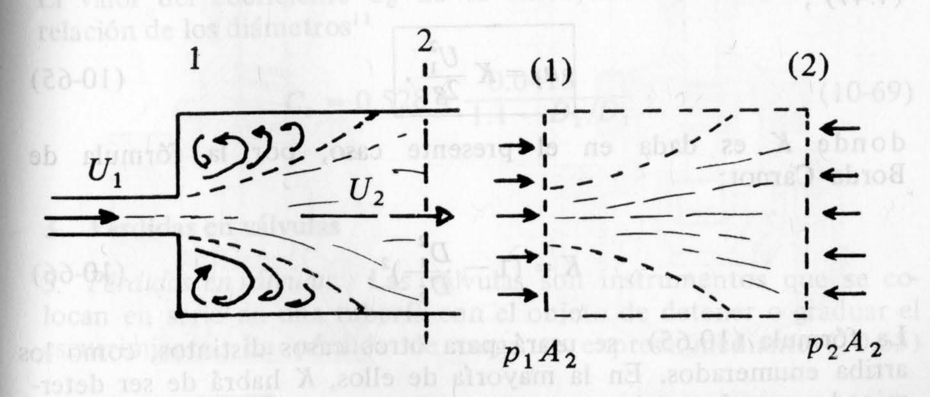


Figura 10.17.

1. *Expansión brusca.* El dibujo indica esquemáticamente el tipo de flujo que se produce. Si se toma el volumen de control indicado y se aplica la ley de la cantidad de movimiento, se tiene

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \rho A_2 U_2 (U_2 - U_1)$$

Por otra parte, de la ecuación de Bernoulli generalizada,

$$\frac{U_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{U_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_f$$

se tiene

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + h_f$$

de donde, usando la cantidad de movimiento

$$\frac{U_2^2 - U_1^2}{2g} + h_f = \frac{U_2}{g}(U_2 - U_1).$$

De aquí se despeja la pérdida de carga, recordando que por continuidad $A_1 U_1 = A_2 U_2$

$$h_f = \frac{2U_2^2 - 2U_2 U_1 - U_2^2 + U_1^2}{2g} = \frac{U_2^2 - 2U_2 U_1 + U_1^2}{2g}$$

$$h_f = \frac{U_1^2}{2g}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2. \qquad (10\text{-}64)$$

La pérdida h_f se puede pues escribir según la fórmula ya conocida (4.47) ,

$$\boxed{h_f = K\frac{U_1^2}{2g},} \qquad (10\text{-}65)$$

donde K es dada en el presente caso, por la fórmula de Borda-Carnot;

$$K = \left(1 - \frac{D_1^2}{D_2^2}\right)^2. \qquad (10\text{-}66)$$

La fórmula (10.65) se usará para otros casos distintos, como los arriba enumerados. En la mayoría de ellos, K habrá de ser determinado experimentalmente, no pudiéndose hacer un razonamiento parecido al anterior.

2. *Contracción brusca.* Si en una tubería aparece una contracción brusca tal como la indica esquemáticamente la figura, la pérdida de carga se puede calcular después de considerar detenidamente lo que ocurre en el fluído.

Entre las secciones 1 y 0 se produce una contracción del chorro líquido, durante el caul hay pocas pérdidas de energía mecánica. En cambio entre las secciones 0 y 2, en donde hay una expansión del chorro, con transformación de la energía cinética en energía de presión, conduce a pérdidas apreciables.

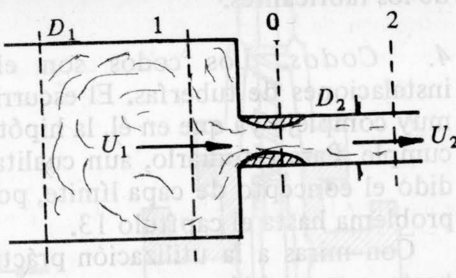


Figura 10.18.

Aplicando (10.64) entre esas dos secciones, se tiene

$$h_f = \frac{(U_0^2 - U_2^2)}{2g}$$

El valor de U_0 se determina por continuidad $U_0 A_2 C_c = U_2 A_2$ y llevándolo en la expresión anterior

$$h_f = \left(\frac{1}{C_c^2} - 1\right)^2 \frac{U_2^2}{2g}, \qquad (10\text{-}67)$$

de donde se obtiene (10.65) otra vez, con

$$K = \left(\frac{1}{C_c^2} - 1\right)^2 \qquad (10\text{-}68)$$

El valor del coeficiente C_c no es único, sino que depende de la relación de los diámetros[11]

$$C_c = 0.528 + \frac{0.0418}{1.1 - D_2/D_1}. \qquad (10\text{-}69)$$

3. Pérdidas en válvulas

3. Pérdidas en válvulas. Las válvulas son instrumentos que se colocan en serie en una tubería con el objeto de detener o graduar el escurrimiento. La pérdida de carga se expresa mediante (10.65)

[11] S. Crocker. R. C. King, *Piping Handbook,* 5o. Edit., McGraw-Hill, págs. 3-132.

donde K depende del tipo de válvula usada. En la tabla 10 se indican varios tipos de válvulas con los valores correspondientes de K.

Para detalles más completos, el lector se podrá referir a los datos de los fabricantes.

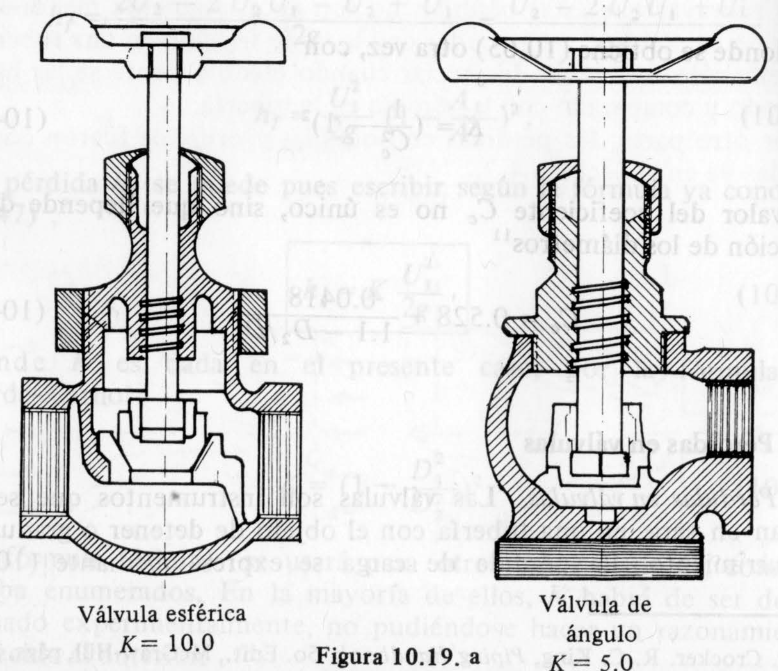
4. Codos. Los codos son elementos muy comunes en las instalaciones de tuberías. El escurrimiento del fluído en un codo es muy complejo ya que en él, la hipótesis de *flujo unidimensional* no se cumple. Para estudiarlo, aun cualitativamente es útil haber comprendido el concepto de capa límite, por lo cual se dejará la discusión del problema hasta el capítulo 13.

Con miras a la utilización práctica se dirá solamente aquí, y ello basta, que también se puede emplear la fórmula (10.65), usando los valores de K indicados a continuación.

Tabla 10.4

VALORES DE K PARA CODOS

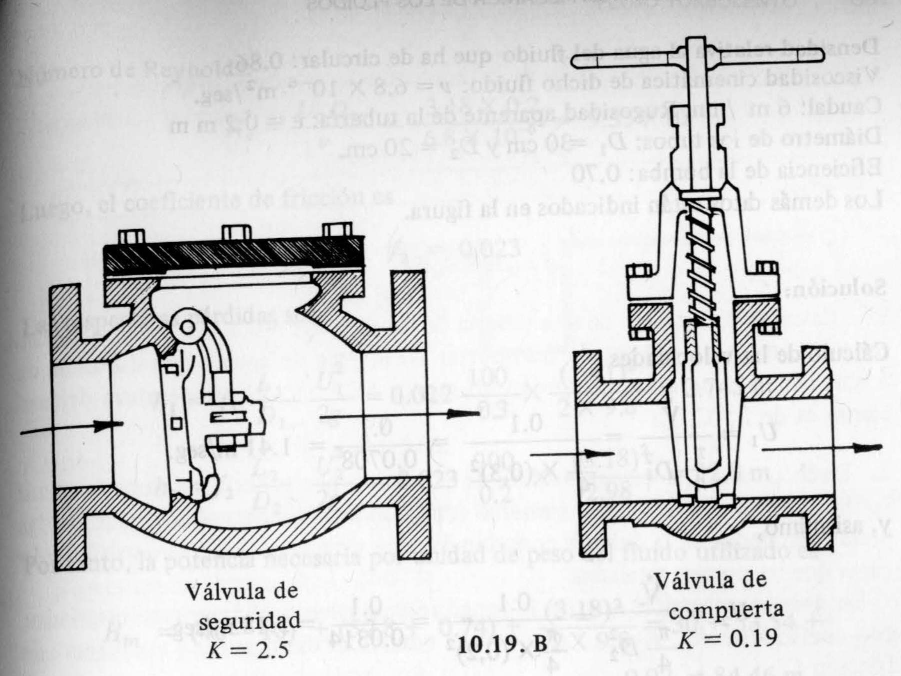
Tipo de codo	K
Codo de retroceso, (180°)	2.2
Empalme en T normal	1.8
Codo a 90° de radio medio	0.75
Codo a 90° de radio grande	0.60



Válvula esférica $K = 10.0$

Válvula de ángulo $K = 5.0$

Figura 10.19. a



Válvula de seguridad $K = 2.5$

Válvula de compuerta $K = 0.19$

10.19 B

Figura 10.19. Los valores de k para válvulas totalmente abiertas.

Ejemplo:

En el sistema mostrado en la figura, calcúlese la potencia que ha de tener la bomba, si se consideran despreciables las pérdidas menores y se tienen los siguientes datos:

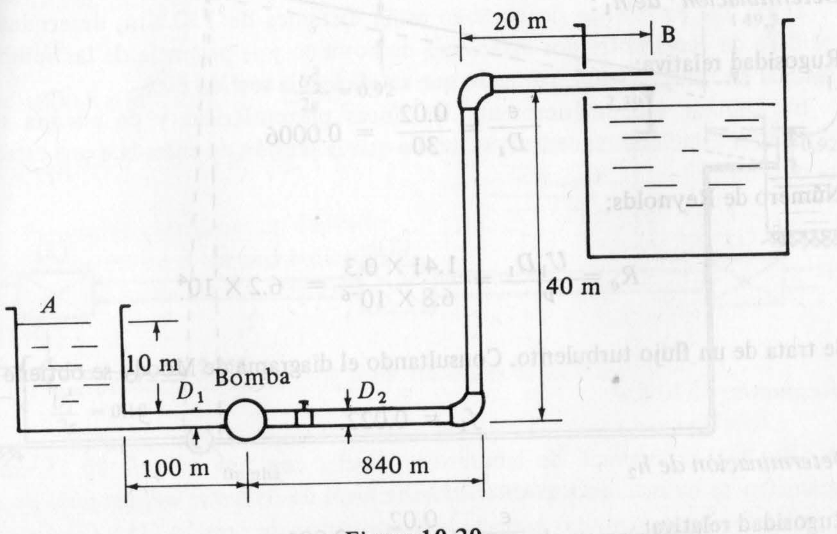


Figura 10.20.

Densidad relativa al agua del fluido que ha de circular: 0.86
Viscosidad cinemática de dicho fluido: $\nu = 6.8 \times 10^{-6}$ m²/seg.
Caudal: 6 m³/mn. Rugosidad aparente de la tubería: $\epsilon = 0.2$ m m
Diámetro de los tubos: $D_1 = 30$ cm y $D_2 = 20$ cm.
Eficiencia de la bomba: 0.70
Los demás datos están indicados en la figura.

Solución:

Cálculo de las velocidades

$$U_1 = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4} D_1^2} = \frac{0.1}{\frac{\pi}{4} \times (0,3)^2} = \frac{0.1}{0.0708} = 1.41 \text{ m/seg.}$$

y, asismimo,

$$U_2 = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4} D_2^2} = \frac{0.1}{\frac{\pi}{4} \times (0,2)^2} = \frac{0.1}{0.0314} = 3.18 \text{ m/seg.}$$

Aplicando el teorema de Bernoulli generalizado entre los puntos A y B, se tiene

$$\frac{U_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} + y_A + H_m = \frac{U_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} + y_B + h_f$$

donde $h_f = h_1 + h_2$.

Determinación de h_1:

Rugosidad relativa:

$$\frac{\epsilon}{D_1} = \frac{0.02}{30} = 0.0006$$

Número de Reynolds:

$$R_e = \frac{U_1 D_1}{\nu} = \frac{1.41 \times 0.3}{6.8 \times 10^{-6}} = 6.2 \times 10^4$$

Se trata de un flujo turbulento. Consultando el diagrama de Moody se obtiene

$$f_1 = 0.022.$$

Determinación de h_2

Rugosidad relativa:

$$\frac{\epsilon}{D_2} = \frac{0.02}{20} = 0.001$$

Número de Reynolds:

$$R_e = \frac{U_2 D_2}{\nu} = \frac{3.18 \times 0.2}{6.8 \times 10^{-6}} = 9.35 \times 10^4$$

Luego, el coeficiente de fricción es

$$f_2 = 0.023$$

Las respectivas pérdidas son

$$h_1 = f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{U_1^2}{2g} = 0.022 \frac{100}{0.3} \times \frac{(1.41)^2}{2 \times 9.8} = 0.745 \text{ m}$$

$$h_2 = f_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{U_2^2}{2g} = 0.023 \frac{900}{0.2} \times \frac{(3.18)^2}{2.98} = 52.8 \text{ m} ,$$

Por tanto, la potencia necesaria por unidad de peso del fluido utilizado es

$$H_m = (40 - 10) + (52.8 + 0.74) + \frac{(3.18)^2}{2 \times 9.8} = 30 + 53.54 + 0.92 = 84.46 \text{ m.}$$

La potencia que ha de recibir el fluido es

$$W = \gamma \dot{V} H_m = 1000 \times 0.86 \times 9.8 \times 0.1 \times 84.64 = 72000 \; W = 72 \text{ Kw}$$

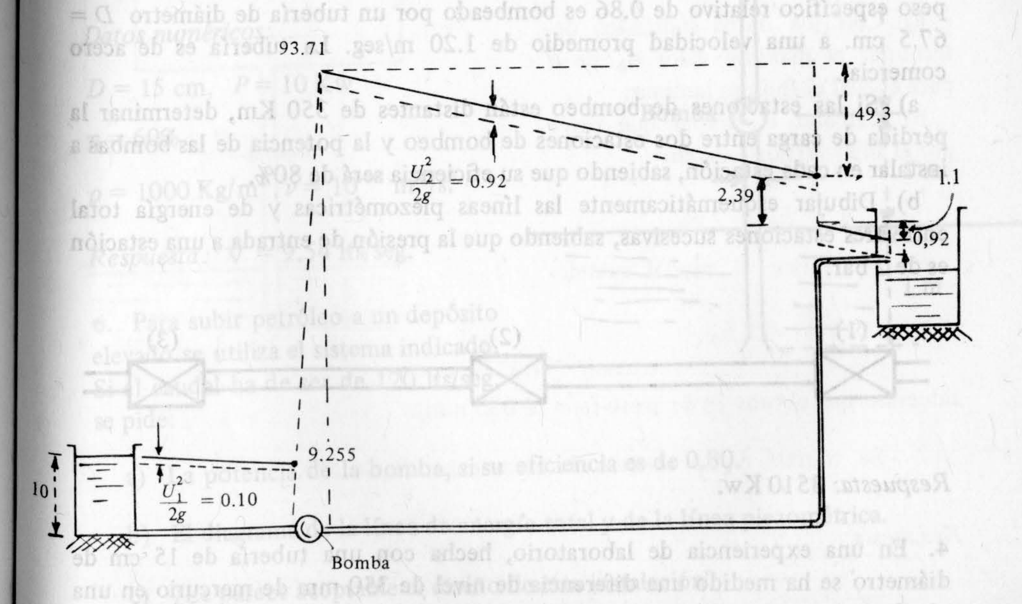


Figura 10.21. Diagrama de altura piezométrica y de energía total.

y, por consiguiente, la potencia de la bomba ha de ser, como mínimo,

$$P = \frac{\dot{W}}{\eta} = 101.6 \text{ Kw}.$$

Ejercicios

1. Calcular el diámetro de una tubería de fundición, $\epsilon = 0{,}5$ mm, colocada horizontalmente, para que pueda transportar 10 m^3/seg de agua a una distancia de 3 Km con una pérdida de presión no mayor de 7 bar. La temperatura del ambiente es de 25°C.

2. Dado un sistema de conducción de un fluido por tubería, se llama *longitud equivalente* de las pérdidas menores (codos, válvulas, boquillas, etc.), de las piezas instaladas en la tubería considerada, que produciría la misma pérdida de carga que las piezas instaladas.

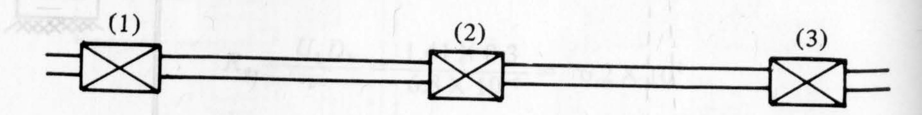
Escribir la expresión que da la longitud equivalente de las piezas instaladas, con coeficientes $K_1, K_2, \ldots K_n$, en una tubería de diámetro D y coeficiente de fricción f.

Respuesta: $L_e = \frac{D}{f} \sum_{i=1}^{n} K_i$

3. Petróleo crudo con una viscosidad cinemática de $\nu = 6 \times 10^{-6}$ m^2/seg y un peso específico relativo de 0.86 es bombeado por un tubería de diámetro $D =$ 67.5 cm. a una velocidad promedio de 1.20 m/seg. La tubería es de acero comercial.

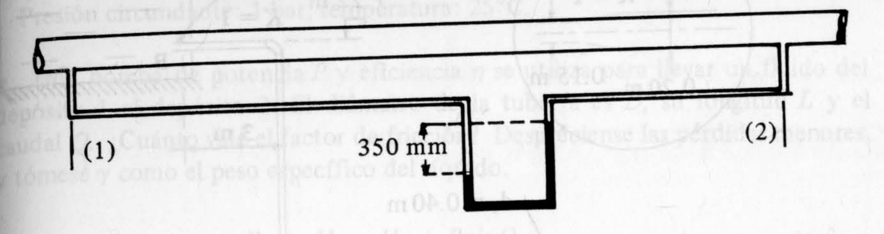
a) Si las estaciones de bombeo están distantes de 350 Km, determinar la pérdida de carga entre dos estaciones de bombeo y la potencia de las bombas a instalar en cada estación, sabiendo que su eficiencia será de 80%.

b) Dibujar esquemáticamente las líneas piezométricas y de energía total entre tres estaciones sucesivas, sabiendo que la presión de entrada a una estación es de 2 bar.



Respuesta: 3510 Kw.

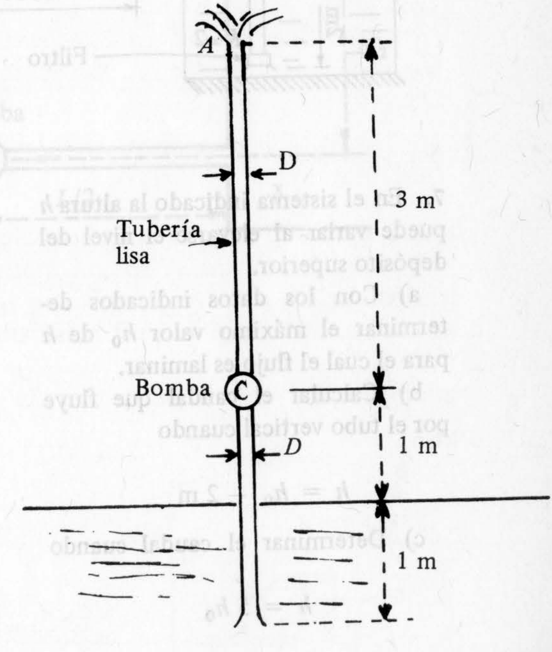
4. En una experiencia de laboratorio, hecha con una tubería de 15 cm de diámetro se ha medido una diferencia de nivel de 350 mm de mercurio en una piezómetro agua-mercurio conectado a dos tomas de presión (1) y (2) distantes de 50 m., tal como indica la figura. Sabiendo que el caudal era de 3000 lts/mn., se pregunta cuál es el coeficiente de fricción, y la rugosidad aparente del tubo, si el agua está a la temperatura de 20°C.



Respuesta: $f = 0.032$, $\epsilon = 0.9$ mm.

5. Con los datos indicados en la figura, evalúe el caudal que sale por el extremo A de la tubería que se muestra.

Suponiendo ahora que con la misma tubería se quiere sacar el caudal máximo posible, instalando una bomba más potente, indicar cuál sería el fenómeno físico que limitaría la potencia de la bomba. Calcular esa potencia máxima, sabiendo que la temperatura del agua es de 20°C.



Datos numéricos:

$D = 15$ cm, $P = 10$ Kw

$\eta = 60\%$

$\rho = 1000$ Kg/m^3, $\nu = 10^{-6}$ m^2/s.

Respuesta: $\dot{V} = 9.54$ lts/seg.

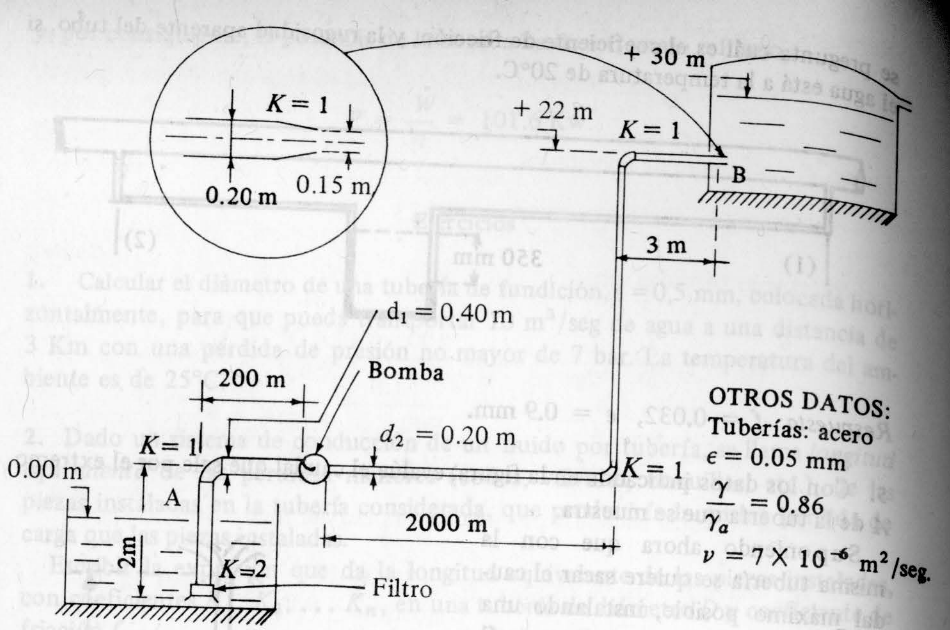
6. Para subir petróleo a un depósito elevado se utiliza el sistema indicado. Si el caudal ha de ser de 120 lts/seg, se pide:

a) La potencia de la bomba, si su eficiencia es de 0.80.

b) El diagrama de la línea de energía total y de la línea piezométrica.

c) ¿Le parece aceptable el diseño de esta instalación?

Respuesta: 210 *Kw*



7. En el sistema indicado la altura h puede variar al elevarse el nivel del depósito superior.

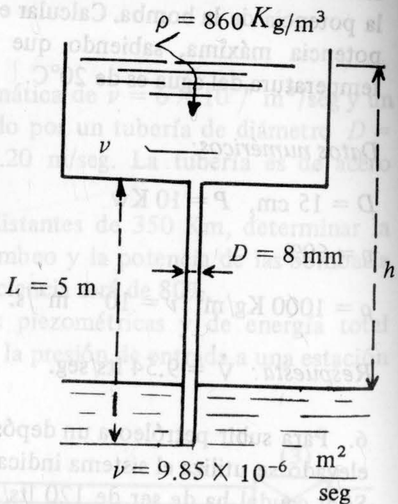
a) Con los datos indicados determinar el máximo valor h_0 de h para el cual el flujo es laminar.

b) Calcular el caudal que fluye por el tubo vertical cuando

$$h = h_0 - 2 \text{ m}$$

c) Determinar el caudal cuando

$$h = 5\, h_0$$



sabiendo que el tubo es de acero ($\epsilon = 0.045$ mm).

Se tomará como criterio de turbulencia $R_e \geqslant 2000$

Respuesta:

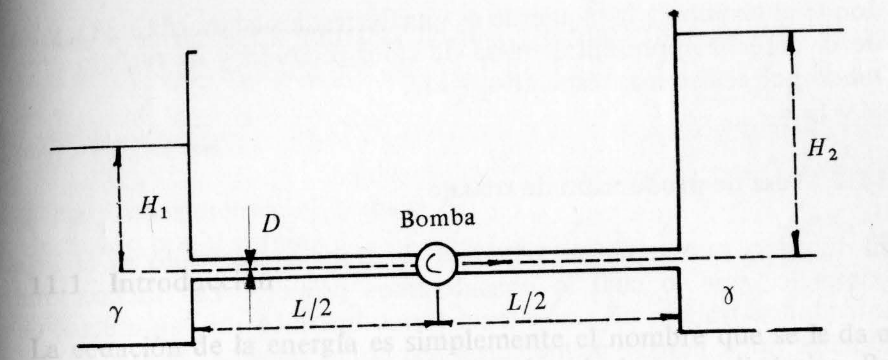
$$h_0 = \frac{32\, \nu^2 R_e L}{g D^3} + \frac{R_e^2\, \nu^2}{2g\, D^2} = \frac{\nu^2 R_e^2}{2gD^2}\left(1 + \frac{64}{R_e}\frac{L}{D}\right),$$ 5.12 lts/mn, 14.6 lts/mm.

8. Para ventilar una mina se requiere extraer 50 Kg/mn de aire. Este sube por un tubo galvanizado de 30 cm de diámetro y de 700 m de largo. Despreciando las pérdidas menores, ¿cuál ha de ser la potencia del extractor de aire?

Presión circundante: 1 bar, temperatura: 25°C.

9. Una bomba de potencia P y eficiencia η se utiliza para llevar un fluido del depósito 1 al depósito 2. El diámetro de la tubería es D, su longitud L y el caudal Q. ¿Cuánto vale el factor de fricción? Despréciense las pérdidas menores, y tómese γ como el peso específico del líquido.

Respuesta: $$f = \frac{D}{L}\left[\frac{H_1 - H_2 + P\eta/\gamma Q}{4\, Q/\pi\, D^2} - 1\right]$$



CAPITULO 11

Ecuación de la energía y aplicaciones

11.1 Introducción

La ecuación de la energía es simplemente el nombre que se le da en mecánica de los fluídos a la primera ley de la termodinámica. Por tratarse de su aplicación a sistemas que fluyen, esto es, esencialmente "abiertos", la primera ley toma distintas formas que se considerarán sucesivamente.

El punto de partida será pues, en todo caso, la expresión sencilla de dicha ley, (7.10),

$$dE = dQ - dW. \qquad (11\text{-}1)$$

E es la *energía interna* de la masa de un fluído contenida, en un instante t, dentro del volumen V, que es limitado por una superficie de control A, esto es

$$E = \int_{(V)} e\rho dV \qquad (11\text{-}2)$$

Como el fluido *está en movimiento*, conviene incluir la

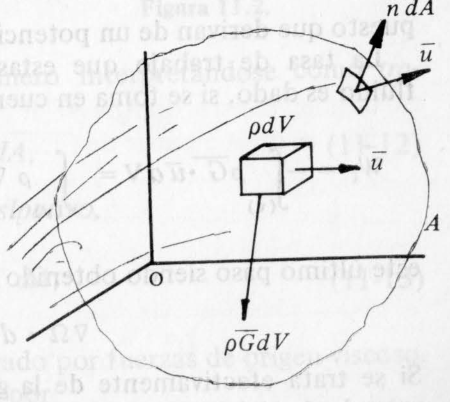


Figura 11.1.

energía cinética en la expresión de (11.1). Esta se indicará, para la misma masa de fluido, por

$$K = \int_{(v)} \frac{1}{2} U^2 \rho dV. \tag{11-3}$$

Finalmente, conviene observar que (11.1) se aplica a una masa de fluido bien determinada, por lo cual, si ésta se mueve, hay que "seguirla" en su movimiento, y por eso se escribirá la primera ley para una masa de fluido en movimiento según:

$$\frac{d}{dt}(E + K) = \frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt}, \tag{11-4}$$

donde el término a la izquierda es una derivada sustancial (3.31), y los de la derecha representan tasas de calor recibido y de *trabajo efectuado* por el sistema, respectivamente.

11.2 Tasa de producción de trabajo

El término que representa la tasa de trabajo efectuado es el más complejo, por lo cual lo consideramos primero. Las fuerzas que introducen trabajo en un sistema termodinámico son, en efecto, de muchos tipos, pero se pueden clasificar como sigue:

a) Fuerzas de campo, generalmente la gravedad, cuyo monto se puede evaluar mediante (4.2) y (4.15),

$$\int_{(v)} \rho \overline{G}\, dV = - \int_{(v)} \rho \nabla \Omega\, dV, \tag{11-6}$$

puesto que derivan de un potencial

La tasa de trabajo que estas fuerzas efectúan sobre el sistema fluido es dado, si se toma en cuenta la convención de signos, por

$$\dot{W}_1 = -\int_{(v)} \rho \overline{G} \cdot \overline{u}\, dV = \int_{(v)} \rho \nabla \Omega \cdot \overline{u}\, dV = \int_{(v)} \rho \frac{d\Omega}{dt} dV, \tag{11-7}$$

este último paso siendo obtenido de la identidad

$$\nabla \Omega \cdot d\overline{r} = d\,\Omega\,. \tag{11-8}$$

Si se trata efectivamente de la gravedad, y si el eje y es vertical, se recordará, (4.16), que Ω es dado simplemente por

$$\Omega = g\,y + C \tag{11-9}$$

b) Puede ser que en el sistema se introduzca o se retire trabajo mediante elementos activos introducidos desde el exterior, es decir como se mencionó en (4.49), mediante la acción de un motor (bomba o turbina), por ejemplo. La tasa de trabajo efectuado correspondiente a ese efecto será indicada mediante $\dot{W}_m$, *trabajo motor,* y entrará tal cual en las ecuaciones.

c) Finalmente, se introduce trabajo en el sistema mediante la acción de los esfuerzos que actúan sobre la superficie de control que limita la masa de fluído considerado. Estos esfuerzos pueden caracterizarse por el vector esfuerzo σ_n, (Ejercicio 11-4),

$$\overline{\sigma}_n = -p\,\overline{n} + \overline{\tau}_n, \tag{11-10}$$

donde $\overline{n}$ es el vector unitario normal a la superficie de control. La tasa de trabajo realizado por este vector es dada por

$$\int_{(A)} \overline{\sigma}_n \cdot \overline{u}\, dA$$

y por consiguiente, el trabajo efectuado por el sistema

$$\dot{W}_3 = -\int_{(A)} \overline{\sigma}_n \cdot \overline{u}\, dA = \int_{(A)} p\overline{u} \cdot d\overline{A} - \int_{(A)} \overline{\tau}_n \cdot \overline{u}\, dA, \tag{11-11}$$

Figura 11.2.

Este trabajo se descompone en dos sumandos, como vemos, el primero interpretándose como *trabajo del flujo*

$$\int p\overline{u} \cdot d\overline{A}, \tag{11-12}$$

y el segundo como *trabajo disipativo,*

$$\dot{W}_{dis} = \int_{(A)} \overline{\tau}_n \cdot \overline{u}\, dA, \tag{11-13}$$

ya que corresponde al trabajo generado por fuerzas de origen viscoso.

La tasa total de trabajo será dada por

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = \int_{(v)} \rho \frac{d\Omega}{dt} dV + \dot{W}_m - \int_{(A)} \overline{\sigma}_n \cdot \overline{u}\, dA, \tag{11-14}$$

y por consiguiente

$$\dot{W} = \int_{(v)} \rho \frac{d\Omega}{dt} dV + W_m + \int_{(A)} p\bar{u} \cdot dA - W_{dis}. \qquad (11\text{-}14)$$

11.3 Ecuación de la energía en forma integral

Podemos ahora regresar a la ecuación (11.4) y recordando (11.2), (11.3) y (11.14), escribir la ecuación de la energía según

$$\frac{d}{dt}\int_{(v)} \rho\, (e + \frac{U^2}{2})\, dV = \frac{dQ}{dt} - \int_{(v)} \rho \frac{d\Omega}{dt} dV - W_m - \int_{(A)} p\bar{u} \cdot d\bar{A} + \dot{W}_{dis} \quad (11\text{-}15)$$

Puesto que $\rho dV = dm$ es constante cuando se sigue un elemento de fluido en su movimiento podemos sacar la derivación sustancial de la segunda integral, y por consiguiente escribir

$$\frac{d}{dt}\int_{(v)} \rho(e + \frac{U^2}{2} + \Omega) dV + \int_{(A)} p\bar{u} \cdot d\bar{A} = \frac{dQ}{dt} + \dot{W}_{dis} - \dot{W}_m. \quad (11\text{-}16)$$

Para incorporar el trabajo del flujo a los demás términos del miembro a la izquierda, basta con aplicar el teorema del transporte o fórmula de Reynolds (6.15), obteniéndose

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)} \rho(e + \frac{U^2}{2} + \Omega) dV + \int_{(A)} \rho\, (e + \frac{U^2}{2} + \Omega)\, \bar{u} \cdot d\bar{A} + \int_{(A)} p\bar{u} \cdot d\bar{A} = \frac{dQ}{dt} + \dot{W}_{dis} - \dot{W}_m \quad (11\text{-}17)$$

de donde, puesto que $p\text{v} = 1$ por definición, y que la entalpía específica es dada a partir de (7.22) por

$$h = e + p\text{v} = e + \frac{p}{\rho} \qquad (11\text{-}18)$$

se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)} \rho(e + \frac{U^2}{2} + \Omega)\, dV + \int_{(A)} \rho\, (h + \frac{U^2}{2} + \Omega)\, \bar{u} \cdot d\bar{A} = \frac{dQ}{dt} + \dot{W}_{dis} - \dot{W}_m.} \quad (11\text{-}19)$$

Esta es, pues, la expresión general de la ecuación de la energía para un fluido en movimiento. Se observará que si el flujo es permanente, el primer término de la ecuación desaparece. Se observará también que la entalpía ha aparecido de una manera natural como consecuencia de la existencia del trabajo del flujo.

Una *simplificación* notable de la ecuación se produce en muchos casos prácticos cuando el término W_{dis} desaparece. Vamos a discutir qué condiciones han de cumplirse para ello.

Un primer caso en que eso ocurre, es cuando el fluído no es viscoso. Recordando (11.13) y la naturaleza de los esfuerzos cortantes en un fluido, (ver sección 8.7 en particular) es evidente que entonces $\bar{\tau}_n = 0$ y por consiguiente $W_{dis} = 0$.

En un *fluido real*, consideremos el caso de un sistema abierto en el cual el fluido entra y sale mediante un flujo con líneas de corriente rectilíneas y paralelas. Si además el fluido es incompresible, se puede ver que también $\tau_n = 0$. Si el fluido es un gas compresible, el valor de τ_n depende de $\frac{\partial \rho}{\partial n}$. Excepto en casos de densidad muy rapidamente variable, esto es, en una onda de choque, este término es despreciable y se puede admitir también que $\bar{\tau}_n = 0$.

Por consiguiente diremos en general que, para una superficie de control en la cual el fluido entra y sale mediante líneas de corriente rectilíneas y paralelas, en dirección perpendicular a la superficie de control, la *ecuación de la energía se escribe*

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)} \rho(e + \frac{U^2}{2} + \Omega)\, dV + \int_{(A)} \rho(h + \frac{U^2}{2} + \Omega)\, \bar{u} \cdot dA = \frac{dQ}{dt} - \dot{W}_m,} \quad (11\text{-}20)$$

donde se recordará que el potencial Ω se escribe simplemente

$$\Omega = g\, y + C, \qquad (11\text{-}21)$$

si las fuerzas de campo son las de gravedad.

Observando además que

$$\rho\, \bar{u} \cdot d\bar{A} = d\dot{m},$$

representa el flujo de masa por unidad de tiempo a través del elemento de área dA, se puede escribir también

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)} \rho(e + \frac{U^2}{2} + \Omega)\, dV + \int_{(A)} (h + \frac{U^2}{2} + \Omega)\, d\dot{m} = \dot{Q} - \dot{W}_m.} \quad (11\text{-}22)$$

11.4 Ecuación de la energía en flujo unidimensional

Como se sabe, flujo unidimensional es aquel en el cual las características del flujo varían con una sola coordenada. Prácticamente se trata de flujo conducido en tuberías o ductos que pueden o no desembocar en sistemas más amplios como motores, etc.

Un tal sistema está indicado esquemáticamente. Como las características del flujo son las mismas en todos los puntos de la sección (1), se puede hacer la integración sobre A, que es la superficie de control indicada en punteado, obteniéndose, al suponer que actúan fuerzas de gravedad

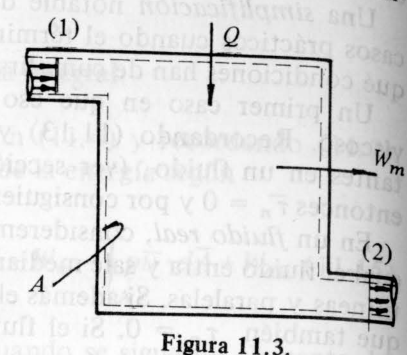


Figura 11.3.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)} \rho\,(e+\frac{U^2}{2}+gy)\,dV+\rho_2 U_2 A_2 (h_2+\frac{U_2^2}{2}+gy_2)-\rho_1 U_1 A_1 (h_1+\frac{U_1^2}{2}+gy_1)=\dot{Q}-\dot{W}_m \quad (11\text{-}22)$$

donde y_1 e y_2 son las cotas de los centroides de las secciones de entrada y salida, respectivamente.

Si $\dot{m}_1 = \rho_1 A_1 U_1$ y $\dot{m}_2 = \rho_2 A_2 U_2$ son los caudales a la entrada y a la salida, la *ecuación general de la energía* se escribe, en un *flujo unidimensional*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)} \rho\,(e+\frac{U^2}{2}+gy)\,dV+\dot{m}_2 (h_2+\frac{U_2^2}{2}+gy_2) - \dot{m}_1 (h_1+\frac{U_1^2}{2}+gy_1) = \dot{Q}-\dot{W}_m . \quad (11\text{-}23)$$

Como caso particular, admitamos ahora que el flujo es *permanente.* Entonces por continuidad

$$\rho_1\, A_1\, U_1 = \rho_2\, A_2\, U_2 = \dot{m} = \frac{dm}{dt}$$

siendo $\dot{m}$ el caudal en masa.

La ecuación de la energía se escribe entonces,

$$h_2 + \frac{U_2^2}{2} + gy_2 - (h_1+\frac{U_1^2}{2g}+gy_1) = q - w_m \quad (11\text{-}24)$$

en donde $q = dQ/dm$ representa el calor recibido por unidad de masa del fluido y $w_m = dW_m/dm$ el trabajo motor generado, por masa unitaria del propio fluido.

Ejemplo 1:

Una máquina que funciona con un fluido compresible el cual se supondrá ser un gas ideal, trabaja en las condiciones indicadas en el esquema. Si la potencia recibida, así como el calor, son estacionarios, y $c_p = 1\ KJ/Kg$, se pregunta la tasa de variación de la energía acumulada dentro de la máquina.

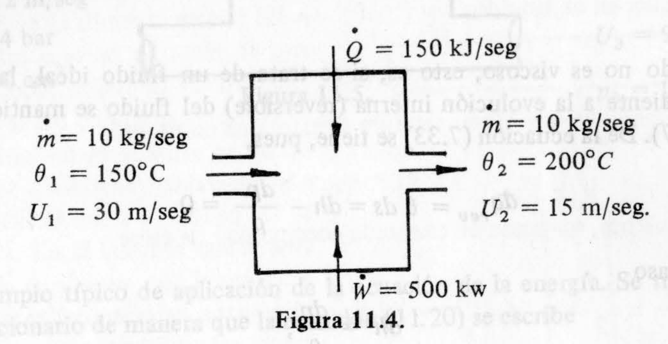


Figura 11.4.

Solución:

Se pide la tasa de incremento de la energía acumulada dentro de la máquina, esto es, con referencia a (11.23)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)} \rho\,(e+\frac{U^2}{2})\,dV = \dot{Q} - \dot{W}_m + \dot{m}_1\,(h_1+\frac{U_1^2}{2}) - \dot{m}_2(h_2+\frac{U_2^2}{2})$$

donde se ha despreciado el efecto de la gravedad.

Se trata de evaluar dicha cantidad,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)} \rho\,(e+\frac{U^2}{2})\,dV = 150\times 10^3 + 500\times 10^3 + 10\,(10^3\times 150+\frac{900}{2}) - 10\,(10^3\times 200+\frac{225}{2})$$

ya que la entalpía en un gas ideal es dada por (7.27),

$$h = c_p\theta .$$

Luego,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(v)} \rho\,(e+\frac{U^2}{2})\,dV = 150\times 10^3 + 500\times 10^3 - 500\times 10^3 - 3{,}88\times 10^3 = 153\times 10^3\ \frac{J}{seg} = 153\ \frac{kJ}{seg}$$

Ejemplo 2:

Mostrar que para un fluido no viscoso, la ecuación de la energía en régimen estacionario se puede escribir

$$\frac{U_2^2}{2} - \frac{U_1^2}{2} + g\,(y_2 - y_1) + \int_1^2 \frac{dp}{\rho} = q - w_m, \qquad (11\text{-}25)$$

y dedúzcase el teorema de Bernoulli, imponiendo las limitaciones correspondientes.

Solución:

Si el fluído no es viscoso, esto es, si se trata de un fluido ideal, la entropía correspondiente a la evolución interna (reversible) del fluido se mantiene constante (7.37). De la ecuación (7.33) se tiene, pues,

$$đq_{rev} = \theta\, ds = dh - \frac{dp}{\rho} = 0.$$

Para este caso

$$dh = \frac{dp}{\rho},$$

y por consiguiente

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 \frac{dp}{\rho}$$

Llevando este resultado en (11.24) se obtiene inmediatamente la relación pedida.

Si además se abandonan las hipótesis de conducción del calor desde afuera y de la existencia de trabajo motor, $q = 0$ y $Wm = 0$, se obtiene el teorema de Bernoulli

$$\frac{U_2^2}{2} + gy_2 + \int_0^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{U_1^2}{2} + gy_1 + \int_0^1 \frac{dp}{\rho}$$

y para un fluido incompresible,

$$\frac{U_2^2}{2} + gy_2 + \frac{p_2}{\rho} = \frac{U_1^2}{2} + gy_1 + \frac{p_1}{\rho}.$$

Ejemplo 3:

En una máquina entra un líquido real por dos tubos de área A_1 y A_2 respectivamente, y sale por una sección (3) de área A_3. Si la temperatura es constante y

la densidad 950 kg/m³, se pide, con los datos indicados en la figura, cuál es el trabajo motor que puede esperarse.

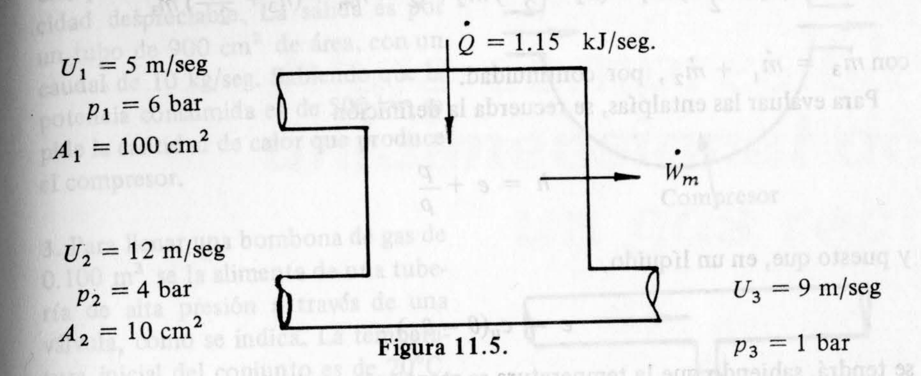


Figura 11.5.

Solución:

Es un ejemplo típico de aplicación de la ecuación de la energía. Se trata de un flujo estacionario de manera que la ecuación (11.20) se escribe

$$\int_{(A)} \rho\,(h + \frac{U^2}{2} + gy)\, \bar{u} \cdot d\bar{A} = \dot{Q} - \dot{W}_m.$$

En vista de que no se dan los datos necesarios, los efectos gravitatorios no se tomarán en cuenta. Como hay dos entradas y una salida, la integral de superficie se compone de tres sumandos, obteniéndose

$$-(h_1 + \frac{U_1^2}{2})\,\rho U_1 A_1 - (h_2 + \frac{U_2}{2})\,\rho U_2 A_2 + (h_3 + \frac{U_3^2}{2})\,\rho U_3 A_3 = \dot{Q} - \dot{W}_m$$

y puesto que

$$\dot{m} = p\, UA$$

se tiene

$$(h_1 + \frac{U_1^2}{2})\dot{m}_1 + (h_2 + \frac{U_2^2}{2})\dot{m}_2 + \dot{Q} = \dot{W}_m + (h_3 + \frac{U_3^2}{2})\dot{m}_3 .$$

con $\dot{m}_3 = \dot{m}_1 + \dot{m}_2$, por continuidad.

Para evaluar las entalpías, se recuerda la definición

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

y puesto que, en un líquido,

$$e = c_v(\theta - \theta_0)$$

se tendrá, sabiendo que la temperatura se mantiene constante,

$$e_1 = e_2 = e_3$$

Por consiguiente, tomando en cuenta la continuidad, se tiene

$$(\frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2})\dot{m}_1 + (\frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2})\dot{m}_2 + \dot{Q} = \dot{W}_m + (\frac{p_3}{\rho} + \frac{U_3^2}{2})\dot{m}_3.$$

El cálculo numérico arroja

$$\dot{W}_m = (\frac{6 \times 10^5}{950} + \frac{25}{2}) 950 \times 5 \times 10^{-2} + (\frac{4 \times 10^5}{950} + \frac{144}{2}) \times 950 \times 12 \times 10^{-3} + 1.15 \times 10^{-3} - (\frac{10^5}{950} + \frac{81}{2}) 950 \times 9 \times A_3$$

con

$$5 \times 10^{-2} + 12 \times 10^{-3} = 9 \times A_3 = 0.062 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

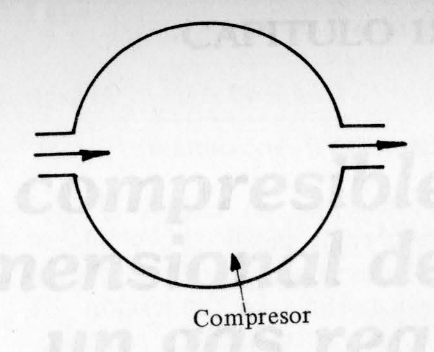
Luego,

$$\dot{W}_m = 28780 \, w = 28.78 \, kw.$$

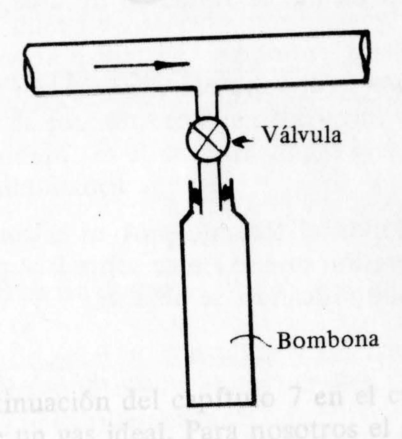
Ejercicios

1. Demostrar el teorema de Bernoulli generalizado a partir de la ecuación de la energía y evaluar el término h_f de (4.48), en función de los términos que aparecen en dicha ecuación.

Respuesta: $h_f = \frac{e_2 - e_1}{g}$, con $q = 0$, $H_m = -w_m/g$.



2. Se hace entrar aire a un compresor a la temperatura de 20°C y con una presión de 1 bar, siendo la velocidad despreciable. La salida es por un tubo de 900 cm² de área, con un caudal de 10 kg/seg. Sabiendo que la potencia consumida es de 500 kw, se pide la cantidad de calor que produce el compresor.



3. Para llenar una bombona de gas de 0.100 m³ se la alimenta de una tubería de alta presión a través de una válvula, como se indica. La temperatura inicial del conjunto es de 20°C. La presión en la tubería es de 25 bar y se mantiene constante. La presión inicial en la bombona es la atmósfera. En el instante que se abre la válvula se observa que la temperatura en la bombona sube a razón de 0.05°C/seg. Despreciando las pérdidas de calor, calcúlese el caudal en masa que fluye a la bombona.

4. Mostrar, recordando (3-55) y (6-1), que las ecuaciones constitutivas de un fluido newtoniano pueden resumirse en, (8-7 y (8-8).

$$\overline{\overline{\sigma}} = -(p + \frac{2}{3} \mu \Theta) \overline{\overline{I}} + 2\mu \overline{\overline{\epsilon}} = -p \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$$

donde $\overline{\overline{I}}$ es la matriz unitaria y

$$\overline{\overline{\tau}} = -\frac{2}{3} \mu \dot{\Theta} \overline{\overline{I}} + 2 \mu \overline{\overline{\epsilon}} .$$

En vista del resultado anterior mostrar que para el vector esfuerzo $\overline{\sigma}_n$, definido en el Ejercicio 6-11, se tiene

$$\overline{\sigma}_n = -p \, \overline{n} + \tau_n$$

donde se evaluará $\overline{\tau}_n$.

Resp. $\tau_n = -\frac{2}{3} \mu \dot{\Theta} \overline{n} + 2 \mu \overline{n} . \overline{\overline{\epsilon}}$

CAPITULO 12



Flujo compresible unidimensional de un gas real

12.1 Introducción

Este capítulo constituye una continuación del capítulo 7 en el cual se estudiaba la compresibilidad de un gas ideal. Para nosotros el gas newtoniano real tiene dos propiedades que se habían despreciado hasta ahora: la viscosidad y la conductividad, ambas resultado de la estructura molecular de la materia. Como consecuencia, el teorema de Bernoulli ya no será aplicable, y tendremos en cambio que hacer uso completo de las leyes de la Termodinámica. Por otra parte, el flujo unidimensional se supondrá permanente y se llevará a cabo en un ducto o tubería de sección constante, o muy lentamente variable.

12.2 Ecuaciones generales

Vamos a establecer primero las ecuaciones generales que usaremos, para después particularizarlas a casos concretos. Consideremos un ducto por el cual circula un gas real y escribamos las leyes físicas conocidas, entre dos secciones (1) y (2).

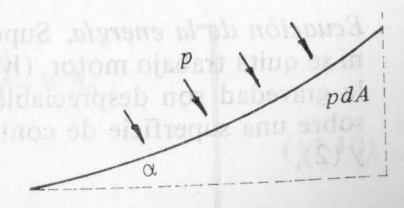
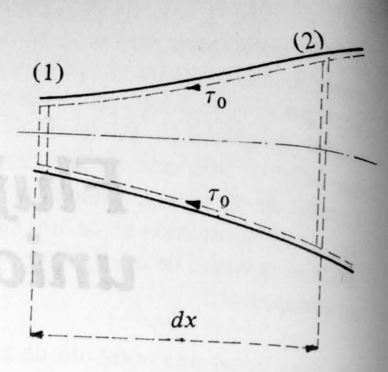


Figura 12.1.

Ecuación de continuidad:

$$d\,(\rho\, UA) = 0 \tag{12-1}$$



Cantidad de movimiento:

Tomaremos en cuenta la fricción en la pared, τ_0 y supondremos la sección circular, para concretar. La aplicación de (6.7) permite escribir, tomando en cuenta la variación de área,

$$pA - (p + \frac{dp}{dx}\,dx)\,(A + dA) + pdA - \tau_0\,\pi D dx = \rho UA\,(U + \frac{dU}{dx}\,dx - U). \tag{12-2}$$

donde el término pdA es la componente horizontal de la fuerza de presión que se ejerce sobre la superficie curva de la pared, (Ver 2.27). Simplificando, se obtiene

$$dp + \frac{4\tau_0}{D}\,dx + \rho UdU = 0. \tag{12-3}$$

Se puede, de una vez, escribir esta ecuación en términos del coeficiente de fricción f de la fórmula de Darcy-Weisbach (10.48).

En efecto de (10-51) se deduce inmediatamente que

$$\tau_0 = \rho f\,\frac{U^2}{8}, \tag{12-4}$$

de donde la ecuación de la *cantidad de movimiento,*

$$dp + f\,\frac{\rho U^2}{2D}\,dx + \rho UdU = 0. \tag{12-5}$$

Ecuación de la energía. Suponemos un ducto al cual no se introduce ni se quita trabajo motor, ($W_m = 0$). Considerando que los efectos de la gravedad son despreciables, podemos escribir (11.20), al integrar sobre una superficie de control limitada por las secciones vecinas (1) y (2),

$$h_2 + \frac{U_2^2}{2} = \frac{dQ}{\dot{m}dt} + h_1 + \frac{U_1^2}{2}, \tag{12-6}$$

siendo $\dot{m} = \rho UA$ el caudal en masa y, por consiguiente,

$$q = \frac{dQ}{dm}$$

el calor recibido por el fluido por unidad de masa.

De forma que se puede escribir la ecuación de la energía como

$$q = h_2 - h_1 + \frac{U_2^2}{2} - \frac{U_1^2}{2}. \tag{12-7}$$

Aquí está planteado el caso de un ducto de *sección* posiblemente *variable,* con *fricción* y *conducción* de calor. Es costumbre tratar separadamente los casos particulares que se obtienen al eliminar *dos* de los tres factores considerados. El de sección variable sin fricción y sin transferencia de calor ya se consideró: es el caso de un gas ideal. Cabe ahora estudiar las otras dos posibilidades.

12.3 Flujo adiabático y con fricción en un ducto

Consideremos el caso de un ducto de sección constante y sin conducción de calor, pero donde hay fricción interna y en las paredes.

La ecuación de continuidad (12.1) se escribe entonces

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = \frac{\dot{m}}{A} = \text{const.} \tag{12-8}$$

y la ecuación de la cantidad de movimiento (12.5), dividiendo por p para adimensionalizar,

$$\frac{dp}{p} + f\,\frac{\rho U^2}{2Dp}\,dx + \rho\,\frac{UdU}{p} = 0. \tag{12.9}$$

Finalmente la ecuación de la energía, (12-7) puesto que $q = 0$, puede escribirse

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2} = h_2 + \frac{U_2^2}{2} = h_0$$

y también, (12-10)

$$c_p\theta_1 + \frac{U_1^2}{2} = c_p\theta_2 + \frac{U_2^2}{2} = h_0 = c_p\theta_0,$$

donde h_0 es la entalpía de estancamiento en la sección considerada y donde se ha recordado (7.27) suponiendo c_p constante, hipótesis que se mantendrá en todo este estudio.

Vamos a detenernos ahora un momento, para considerar qué nos proponemos encontrar. En un problema de flujo en un conducto dado, se plantean generalmente las siguientes preguntas:

Conocidas las condiciones del flujo en una sección del tubo, que puede ser la de entrada, determinar las condiciones de flujo en otra sección, que puede ser la de salida. Las incógnitas serán pues generalmente *cuatro:* velocidad, presión, densidad y coeficiente de fricción *f*, o longitud del tubo.

Ahora, observemos que sólo tenemos *tres* ecuaciones, recapituladas más arriba: (12.8), (12.9) y (12.10). Es evidente que la que falta es una ecuación que defina el gas empleado, esto es su *ecuación de estado.* Si esta ecuación es dada en forma de tabla, el cálculo habrá de ser numérico, por lo menos en parte. En cambio si se usa la ecuación de un gas perfecto (1.30), entonces se podrán obtener fórmulas cerradas.

Aceptemos pues esta limitación en un primer estudio e introduzcamos la ecuación de estado

$$\frac{p}{\rho} = R\theta \qquad (12.11)$$

en el conjunto anterior.

Curvas de Fanno. Vamos a estudiar qué condiciones se imponen al fluido al tener que cumplirse las ecuaciones de (12.8), (12.10), (12.11), es decir, para valores *no especificados* del coeficiente de fricción. Para seguir la evolución de un gas que fluye en un ducto en las condiciones indicadas, resulta muy útil observarlo en un diagrama *h–s.* Es decir, vamos a determinar $s = s\,(h)$ para los procesos definidos por las ecuaciones antes mencionadas.

Para ello partimos de una expresión conocida de la entropía de un gas perfecto (Ejercicio 7, Secc. 7.2).

$$s - s_1 = c_v \ ln \frac{p}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^k \qquad (12\text{-}12)$$

Esta ecuación es simplemente una consecuencia de las definiciones de calor específico y entropía, y de la ecuación (12.11).

Ahora, despejando U de (12.8) y llevando el valor en (12.10) se obtiene

$$\rho = \frac{\dot{m}}{A\sqrt{2}\,\sqrt{h_0 - h}} \qquad (12.13)$$

Si escribimos (12.11) en función de la entalpía de un gas perfecto

$$h = c_p\,\theta \qquad (12\text{-}14)$$

tenemos una nueva expresión de la ecuación de estado,

$$p = \frac{R\rho h}{c_p} = \frac{Rh\dot{m}}{Ac_p\sqrt{2}\,\sqrt{h_0-h}} \qquad (12\text{-}15)$$

Llevando los valores (12.13) y (12.15) en (12.12) se obtiene, finalmente,

$$s - s_1 = ln \left[\frac{\rho_1^k}{p_1}\,\frac{R}{c_p}\left(\frac{A\sqrt{2}}{\dot{m}}\right)^{k-1}\right] + c_v\ ln\left[h\,(h_0-h)^{\frac{k-1}{2}}\right] \qquad (12\text{-}16)$$

Esta ecuación define una curva en el plano *h–s* llamada curva de Fanno. Mejor dicho por cada punto h_1, s_1, y para un caudal dado, se obtiene una curva de Fanno, representada esquemáticamente en el dibujo, y cuyas propiedades más importantes pasamos a estudiar.

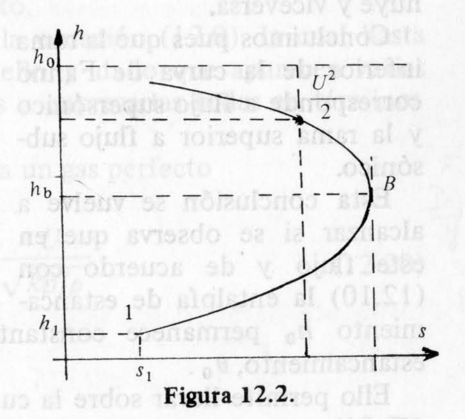


Figura 12.2.

Determinemos el punto B de máxima entropía, esto es, el punto en que

$$\frac{ds}{dh} = 0. \qquad (12\text{-}17)$$

Tenemos

$$\frac{ds}{dh} = c_v\left(\frac{1}{h} - \frac{k-1}{2}\,\frac{1}{h_0-h}\right)$$

de donde, llamando h_b la entalpía en B

$$h_b = \frac{2}{k+1}\,h_0 \qquad (12\text{-}18)$$

Tiene interés calcular la velocidad del gas cuando se encuentra en las condiciones representadas por el punto B.

Para ello, volvemos a (12.10)

$$U_b^2 = 2\,(h_0 - h_b) = 2\,(\frac{k+1}{2}\,h_b - h_b) = (k-1)\,h_b$$

$$= (k-1)\;c_p\,\theta_b = (k-1)\frac{kR}{k-1}\,\theta_b = kR\theta_0 = c_b^2. \qquad (12\text{-}19)$$

El último paso recordando (7.50). Así pues, el punto B representa condiciones del flujo en que la velocidad es igual a la velocidad local del sonido. Esto es, corresponde a $M = 1$.

Observemos, por otra parte que según (12.10), cuando h aumenta, la velocidad U disminuye y viceversa.

Concluimos pues que la rama inferior de la curva de Fanno corresponde a flujo supersónico y la rama superior a flujo subsónico.

Esta conclusión se vuelve a alcanzar si se observa que en este flujo y de acuerdo con (12.10) la entalpía de estancamiento h_0 permanece constante y por ende la temperatura de estancamiento, θ_0.

Figura 12.3.

Ello permite llevar sobre la curva de Fanno, los valores de h y de $\frac{U^2}{2}$.

Para estudiar con mayor detenimiento lo que ocurre, supongamos que inicialmente las condiciones de flujo están representadas por el punto (1) de la curva. Como la entropía no puede disminuir las condiciones del flujo evolucionarán en el sentido de (1) a B, es decir la entalpía aumentará, así como la temperatura y la presión; en cambio el número de Mach y por consiguiente la velocidad del fluído disminuirán, todo ello hasta alcanzar el estado sónico representado en B. De ahí en adelante la entalpía no puede seguir creciendo ni la velocidad disminuyendo ya que ello implicaría, pasado el punto B, una disminución de la entropía. Aparece pues, el fenómeno del *estrangulamiento* del flujo. Así, en una tubería de sección constante, el flujo no puede pasar *en forma gradual* de supersónico a subsónico.

Si se parte de un punto (2) en condiciones subsónicas, se tienen fenómenos parecidos: la entropía aumenta necesariamente, luego la

entalpía disminuye, así como la temperatura y la presión. La velocidad por *consiguiente aumenta* hasta las condiciones sónicas en B.

Todos estos fenómenos, naturalmente presuponen una cierta longitud del ducto a lo largo del cual se llevan a cabo. Existe pues una longitud de tubería para la cual se produce $M =$ a la salida. Si el tubo es más corto el gas simplemente desemboca sin haber evolucionado hasta el punto B. Finalmente si la tubería es más larga se pueden producir ondas de choque, (si el flujo es supersónico) y *estrangulamiento:* lo cual significa simplemente que el ducto no puede evacuar el caudal $\dot{m}$ propuesto y que nuevas condiciones de funcionamiento han de establecerse, a menor caudal. Más adelante se consideran estas posibilidades con mayor detalle.

Estudio de la fricción. Para precisar este análisis cualitativo, pasemos a desarrollar las fórmulas que permiten saber, a partir de un estado inicial, qué pasará a lo largo del ducto.

Se trata ante todo de integrar la ecuación (12.9), la cual hasta ahora no ha sido utilizada. Para ello y dado que aparecen varias variables no independientes, vamos a expresarlas todas en términos del número de Mach.

Así, de la propia definición y para un gas perfecto

$$M = \frac{U}{c} = \frac{U}{\sqrt{kp/\rho}}, \qquad (12\text{-}20)$$

sacamos

$$\frac{\rho\,U^2}{p} = kM^2 \qquad (12\text{-}21)$$

Asimismo, usando de nuevo (12.20)

$$\frac{\rho\,UdU}{p} = \frac{kM^2}{U^2}\,UdU = kM^2\,\frac{dU}{U}. \qquad (12\text{-}23)$$

Ahora bien, la ecuación de la energía (12.10) es equivalente a

$$dh + UdU = c_p\,d\theta + UdU = 0$$

recordando que $M = \frac{U}{c} = U/\sqrt{kR\theta}$ se tiene

$$M^2\;kR\theta = U^2$$

y dividiendo la ecuación anterior por este valor

$$\frac{c_p\, d\theta}{M^2 kR\theta} + \frac{dU}{U} = 0. \qquad (12\text{-}24)$$

Como $c_p = kR/k-1$), según (7.30),

$$\frac{d\theta}{\theta} = -(k-1)\, M^2\, dU/U\,. \qquad (12\text{-}25)$$

Diferenciando $M^2\, kR\theta = U^2$ se tiene

$$2\,\frac{dU}{U} = 2\,\frac{dM}{M} + \frac{d\theta}{\theta} \qquad (12\text{-}26)$$

Eliminando $d\theta/\theta$

$$-(k-1)\, M^2\,\frac{dU}{U} = 2\,\frac{dU}{U} - 2\,\frac{dM}{M} \qquad (12\text{-}27)$$

de donde, despejando dU/U

$$\frac{dU}{U} = \frac{dM}{M(1 + \frac{k-1}{2} M^2)}\,. \qquad (12\text{-}28)$$

Finalmente, llevando este valor en (12.23),

$$\frac{\rho\, U dU}{p} = \frac{kMdM}{1 + \frac{k-1}{2} M^2} \qquad (12\text{-}29)$$

Tenemos un término más de (12.9), expresado en función de M. Procedamos ahora a calcular $\frac{dp}{p}$.

Recordando (12.8) y la ecuación de estado del gas perfecto

$$p = \rho\, R\theta = \frac{\dot m}{A}\, R\,\frac{\theta}{U}\,, \qquad (12\text{-}30)$$

de donde

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\theta}{\theta} - \frac{dU}{U} \qquad (12\text{-}31)$$

Llevando los valores de (12.25) y (12.28) se obtiene, después de simplificar

$$\frac{dp}{p} = \frac{1 + (k-1)\, M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}\,\frac{dM}{M}\,. \qquad (12\text{-}32)$$

Si ahora sustituimos los resultados de (12.21), (12.29) y (12.32) en la ecuación (12.9) obtenemos la ecuación diferencial de la cantidad de movimiento expresada en función de M:

$$\frac{fdx}{D} = \frac{2\,(1 - M^2)}{kM^3\,(1 + \frac{k-1}{2} M^2)}\, dM\,. \qquad (12\text{-}33)$$

Para integrarla y en vista de que las variables se han separado, descomponemos en fracciones simples, según la identidad algebraica

$$\frac{1 - M^2}{M^3\,(1 + aM^3)} = \frac{1}{M^3} - \frac{1+a}{M} + \frac{a\,(1+a)M}{1 + a\,M^2}$$

$$= \frac{1}{M^3} - \frac{1+a}{M\,(1 + a\,M^2)}\,; \qquad (12\text{-}34)$$

es decir, que tenemos por integrar,

$$\frac{fdx}{D} = \frac{2}{k}\,\frac{dM}{M^3} - \frac{k+1}{k}\,\frac{dM}{M\,(1 + \frac{k-1}{2} M^2)}\,. \qquad (12\text{-}35)$$

La integración se hará desde el origen del tubo: $x = 0$, $M = M_1$, hasta la longitud genérica $x = l$, $M = M$, obteniéndose

Figura 12.4.

$$\frac{f_m\, l}{D} = \frac{1}{k}\;\Big[-\frac{1}{M^2}\Big]_{M_1}^{M} - \frac{k+1}{2k}\; ln\;\Big[\frac{M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}\Big]_{M_1}^{M}$$

esto es,

$$\frac{f_m\, l}{D} = \frac{1}{k}\,\Big[\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2}\Big] + \frac{k+1}{2k}\; ln\,\Big[\Big(\frac{M_1}{M}\Big)^2\,\frac{(k-1)\,M^2 + 2}{(k-1)\,M_1^2 + 2}\Big] \qquad (12\text{-}36)$$

donde f_m es el valor promedio definido por

$$f_m = \frac{1}{l} \int_0^l f dx$$

Este valor promedio es el que se usará siempre, ya que la misma incertidumbre sobre su tamaño no justifica afinar más el cálculo. Para flujo subsónico se tomará el valor de f_m dado en la tabla de Moody, y para el caso supersónico, la mitad de ese valor[1]

Como método de cálculo, se acostumbra calcular la *"longitud crítica"* L_1^* correspondiente al caso límite $M = 1$, obteniéndose

$$\frac{f_m L_1^*}{D} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{M_1^2} - 1\right] + \frac{k+1}{k} \ln\left[M_1^2 \frac{k+1}{(k-1)M_1^2 + 2}\right] \qquad (12\text{-}37)$$

expresión que ha sido tabulada para varios valores de k.

Si eliminamos el índice 1, obtenemos finalmente,

$$\frac{f_m L^*}{D} = \frac{1}{k}\left[\frac{1}{M^2} - 1\right] + \frac{k+1}{k} \ln\left[M^2 \frac{k+1}{(k-1)M^2 + 2}\right] \qquad (12\text{-}38)$$

Ejemplo 1:

Por un ducto de diámetro 10 cm, $f = 0.01$, entra aire a la presión de 1 bar, una temperatura de 15°C y con un número de Mach 3. Determínese la longitud crítica.

Solución:

De (12.28), haciendo $k = 1.4$

$$\frac{fL^*}{D} = \frac{5}{7}\left(\frac{1}{M^2} - 1\right) + \frac{6}{7} \ln \frac{6M_1^2}{M^2 + 5}$$

se calcula L^*

$$L^* = \frac{0.10}{0.01}\left[\frac{5}{7}\left(\frac{1}{9} - 1\right) + \frac{6}{7} \ln \frac{6 \times 9}{9 + 5}\right]$$

$$= 10\left[\frac{5}{7}\left(-\frac{8}{9}\right) + \frac{6}{7} \ln \frac{6 \times 9}{14}\right] = 10\left[-\frac{40}{63} + \frac{6}{7} \ln 3.86\right]$$

$$= 10\left(-0.635 + \frac{6}{7} \times 1.35\right) = 10(-0.635 + 1.155) = 5.20 \text{ m}$$

[1] J. H. Keenan, E. P. Neumann. *"Measurements of Friction in Pipes for Subsonic and Supersonic Flow of Air"*, *J. App. Mech.*, Vol. 13, No. 2.

Características del flujo. Las relaciones antes encontradas permiten por otra parte la determinación de la presión, velocidad y temperatura del gas en cualquier punto del ducto.

En efecto, de la (12.32), integrando entre $x = 0$, $p = p_1$, $M = M_1$ y $x = l$, $p = p$, $M = M$, se tiene, después de invertir,[2]

$$\frac{p_1}{p} = \frac{M}{M_1} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}} \qquad (12\text{-}39)$$

Asimismo, de (12.28) se obtiene, integrando e invirtiendo

$$\frac{U_1}{U} = \frac{M_1}{M} \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}} = \frac{\rho}{\rho_1} \qquad (12\text{-}40)$$

Finalmente, combinando (12.25) y (12.28) se tiene

$$\frac{d\theta}{\theta} = -(k-1) \frac{MdM}{1 + \frac{k-1}{2} M^2}$$

de donde, integrando de nuevo, e invirtiendo

$$\frac{\theta_1}{\theta} = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M^2}{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2} \qquad (12\text{-}41)$$

Características de estrangulamiento. A menudo se utilizan estas fórmulas para calcular las condiciones de estrangulamiento, $M = 1$, las cuales se indican con un asterisco: p^*, U^*, θ^*. Se obtiene entonces, sucesivamente,

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{k+1}{2 + (k-1)M^2}}, \qquad (12\text{-}42)$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \frac{U}{U^*} = M \sqrt{\frac{k+1}{2 + (k-1)M^2}}, \qquad (12\text{-}43)$$

[2] Se invierte, simplemente porque así aparecen los resultado numéricos en las tablas.

$$\frac{\theta}{\theta^*} = \frac{k+1}{2+(k-1)\,M^2}\,, \qquad (12\text{-}44)$$

donde se ha eliminado el índice 1. Estas fórmulas se presentan en forma de gráfico y tabuladas también. Constituyen las características del flujo asociadas a la curva de Fanno.

Funcionamiento de un tubo adiabático con fricción. Hasta ahora hemos estudiado las propiedades que se verifican a lo largo de un tubo adiabático con fricción y algunas de sus implicaciones como el fenómeno de estrangulamiento. Vamos a considerar en lo que sigue el funcionamiento del tubo cuando está sometido a distintas condiciones de flujo en sus extremos.

Tomaremos primero el caso subsónico y después el supersónico.

1. Flujo subsónico

Para obtener este tipo de flujo, bastará que conectemos el tubo a un depósito de características permanentes mediante una *tobera convergente.* Aguas abajo, el otro extremo del tubo será puesto en comunicación con un depósito receptor, en el cual las condiciones que llamamos ambientales, podrán ser variadas.

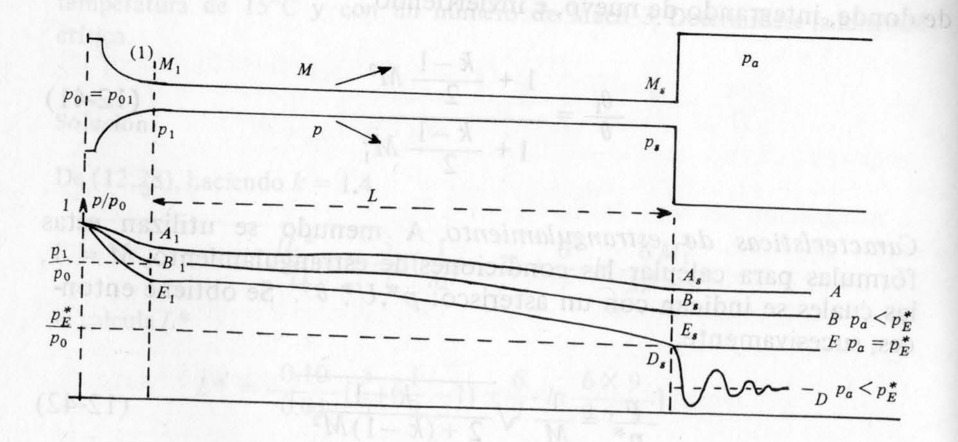


Figura 12.5.

Supondremos que el flujo en la tobera convergente es isoentrópico, esto es, que en ella se pueden despreciar las pérdidas por fricción y de calor. Por esa razón la presión de estancamiento a la entrada del tubo, $p_{0,1}$ será igual a la presión en el depósito.

Por otra parte, se seguirá la evolución del flujo en el curva de Fanno correspondiente.

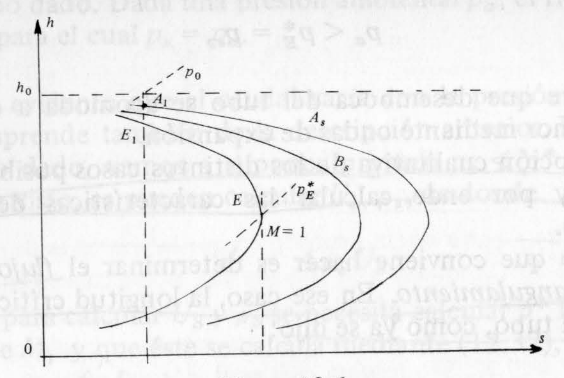


Figura 12.6.

Supóngase pues que la presión ambiental parte del valor $p_a = p_0$, para el cual no hay flujo, naturalmente, y que se la disminuye poco a poco.

Cuando la razón p_a/p_0 corresponde al punto A_s, se tiene un *flujo subsónico* con una presión de salida en el chorro.

$$p_s = p_a,$$

y un número de Mach de salida M_s tal que

$$M_1 < M_s < 1$$

Al mismo tiempo la longitud crítica $L^* > L$.

Las condiciones del flujo entre la sección (1) representadas por A_1 y la sección de salida (A_s) se pueden observar en el gráfico de presiones y en el h–s. La curva de Fanno que aparece corresponde al valor del caudal en el tubo para ese valor de p_a.

Si ahora se sigue bajando la presión ambiental hasta un valor correspondiente al punto B_s, el fenómeno es cualitativamente similar al anterior, la velocidad aumenta en el tubo, luego también el caudal mientras que la presión disminuye. Al aumentar el número de Mach disminuye la longitud crítica L^*.

Es pues evidente que si p_a sigue disminuyendo la velocidad a la salida del tubo alcanzará la del sonido y se tendrá $M_s = 1$. En ese momento, naturalmente $L^* = L$ y el flujo se *estrangula.* Esto es, de ahí en adelante, una disminución de p_a no altera las condiciones del flujo en el tubo. El caudal máximo posible se ha alcanzado y la presión de salida del chorro es dada por

$$p_s = p_E^*,$$

donde p_E^* es la presión crítica p^* asociada con la estrangulación. Si ahora se supone

$$p_a < p_E^* = p_s,$$

el chorro libre que desemboca del tubo se acomoda a esa presión ambiental menor mediante ondas de expansión.

Esta descripción cualitativa de los distintos casos posibles permite comprender y por ende calcular las características del flujo en cualquier caso.

Lo primero que conviene hacer es determinar el *flujo en condiciones de estrangulamiento.* En ese caso, la longitud crítica es igual a la longitud del tubo, como ya se dijo:

$$L = L^*$$

Luego, mediante (12.37) o el uso de la tabla correspondiente se calcula M_{1E}. Dado que el flujo en la tobera es isoentrópico y que p_0 es conocido, las características $p_{01} = p_0, p_1, \theta_1$ se determinan mediante las relaciones isoentrópicas. Hecho esto, *las características a la salida, p_E^*, θ_E^*, M_E^* se determinan mendiante las ecuaciones (12.42) a (12.44).* El flujo estrangulado queda, pues, determinado. Ese es el flujo que existe, por lo dicho anteriormente, siempre que $p_a \leqslant p_E^*$

Consideremos el caso en que $p_a > p_E^*$. Con el objeto de no tener que resolver ciertas ecuaciones implícitas que se plantean, vamos a tomar como parámetro independiente M_1. Evidentemente sólo se considerarán valores de M_1

$$0 < M_1 < M_E$$

lo cual limita ya enormente el trabajo.

Se puede entonces repetir un proceso ya llevado a cabo para el caso de estrangulamiento:

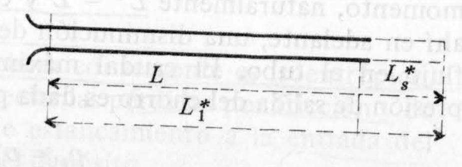
a) Dado M_1 se calculan las demás características del flujo en la sección (1): ρ_1, p_1, θ_1 mediante las relaciones isoentrópicas, que están tabuladas.

b) A partir de M_1 también, la tabla de Fanno permite calcular L_1^* (que será naturalmente mayor que L), y también p^* (usando p_1).

c) La relación evidente

$$L_S^* = L_1^* - L$$

arroja el valor de la magnitud L_S^*, de la cual se determina M_S.



d) Conocidos M_S y p^*, se calculan las características a la salida, en particular p_S.

Habiendo hecho este cálculo para distintos valores de M_1 en el rango indicado, quedan resueltos todos los posibles problemas de flujo en el tubo dado. Dada una presión ambiental p_a, el flujo en el tubo será aquel para el cual $p_s = p_a$.

Caudal. Es evidente que el caudal varía con la presión ambiental p_a. Ello se desprende también de la descripción anterior. Para calcularlo en un caso dado, vamos a suponer primero $p_a < p^*$. En este caso, como se ha visto, se pueden calcular U_s, ρ_s, de donde

$$\dot{m} = A \rho_S U_S$$

Dado que para calcular U_S y ρ_S se necesita calcular p^* la cual a su vez depende de M_1 y que éste se calcula mediante (12.37), el caudal $\dot{m}$ es una función de $\frac{f_m L}{D}$, es decir, en el supuesto que no haya estrangulamiento,

$$\dot{m} = \dot{m}\ (f_m L/D)$$

y si lo hay $\dot{m} = \dot{m}_{max}$ para ese valor de $\frac{f_m L}{D}$.

La relación funcional indicada se ha representado gráficamente después de adimensionalizar $\dot{m}$, dividiéndolo por el caudal máximo que tendría, en las mismas condiciones, la *tobera convergente sola.* Recordando (7.82) el caudal máximo en la tobera sola, m_t es dado por

$$\dot{m}_t = A p_c c_c = \frac{A p_0}{\sqrt{R\theta_0}} k^{1/2} \left[\frac{2}{k+1}\right]^{\frac{k+1}{2(k-1)}}$$

Figura 12.7.

donde A es el área común de la tubería y de la boca de la tobera. Se representará pues,

$$\frac{\dot{m}}{m_t} = f\left(\frac{p_a}{p_0}, \frac{f_m L}{D}\right)$$

Ejemplo 2:

Se hace fluir aire a partir de un depósito en que la presión es de $p_0 = 6$ bar y la temperatura de 50°C, primero a lo largo de una tobera convergente en la cual se supone nula la fricción y después a lo largo de un conducto térmicamente aislado de 80 cm de largo y 8 cm de diámetro; se supone el coeficiente de fricción promedio de $f = 0.02$. Se pregunta cuál es el máximo valor p_{am} de la presión ambiental, aguas abajo del conducto, que permite un caudal máximo. ¿Cuál es el valor de ese caudal?

Si ahora la presión ambiental se hace igual a $p_a = \frac{p_0 + p_{am}}{2}$. Se pide determinar las características del flujo a la salida y el caudal correspondiente.

Solución:

Vamos a establecer las condiciones de flujo con estrangulamiento. Este se produce cuando $L = L^*$. Calculemos

$$\frac{fL^*}{D} = \frac{0.02 \times 0.80}{0.08} = 0.20$$

Para ese valor se obtiene $M_{1E} = 0.70$ en las tablas de Fanno.

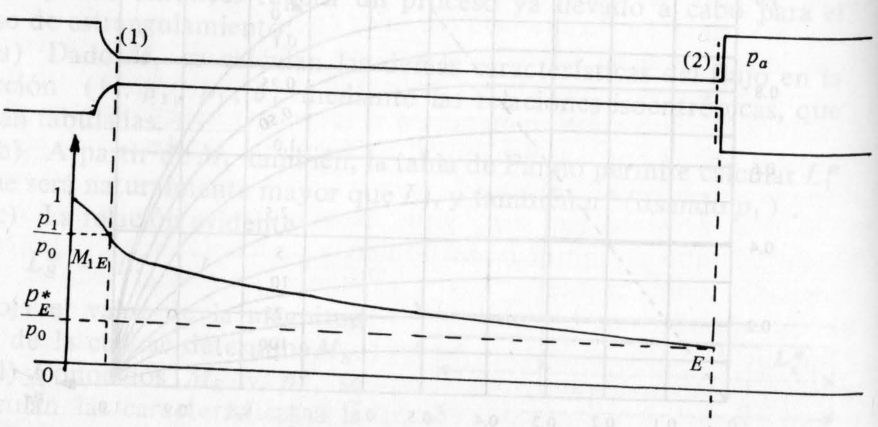


Figura 12.8.

Las condiciones de estancamiento son

$$p_0 = 6 \text{ bar}, \quad \theta_0 = 273 + 50 = 323°k$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R\theta_0} = \frac{6 \times 10^5}{288 \times 323} = 6.45 \text{ kg/m}^3$$

Las condiciones en la sección (1), donde $M_1 = 0.70$ son, de las relaciones isoentrópicas,

$$\frac{p_1}{p_0} = 0.721, \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = 0.971, \quad \frac{\theta_1}{\theta_0} = 0.911$$

o sea

$$p_1 = 4.33 \text{ bar}, \quad \rho_1 = 6.26 \text{ kg/m}^3, \quad \theta_1 = 294°\text{K}$$

Cálculo de la presión crítica p^*_E. Conocidos M_{1E} y p_1, se calcula p^*_E a partir de los valores de Fanno.

$$\frac{p_1}{p^*_E} = 1.49 \implies p^*_E = \frac{p_1}{1.49} = \frac{4.33}{1.49} = \underline{2.9 \text{ bar}}$$

Ese es el valor más alto posible de la presión ambiental que permite caudal máximo: $p_{am} = 2.9$ bar

Ese caudal máximo se puede calcular en la sección (1)

$$\dot{m} = A\rho_1 U_1 = A\rho_1 M_{1E}\, c_1 = A\rho_1 M_{1E}\sqrt{k p_1/\rho_1}$$

$$= \frac{\pi}{4}(0.08)^2 \times 6.26 \times 0.7 \times \sqrt{1.4 \times 4.33 \times 10^5/6.26}$$

$$= 10^{-4} \times 50.3 \times 6.26 \times 0.7 \times 310 = \underline{6.86 \text{ kg/seg}}$$

La presión ambiental se hace ahora igual a

$$p_a = \frac{p_0 + p_{am}}{2} = \frac{6 + 2.9}{2} = 4.45 \text{ bar.}$$

Dada la presión ambiental y puesto que el flujo subsónico resultante ya no será estrangulado, se habrá de tener

$$p_2 = p_a = 4.45 \text{ bar}$$

El problema está físicamente determinado. Sin embargo, no es fácil calcular las características del flujo aguas arriba directamente. Por esto se recomienda el proceso de tanteo, organizado en el cuadro adjunto.

TABLA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_1	p_1/p_0	p_1 bar	p_1/p^*	p^* bar	$\frac{fL_1^*}{D}$	$\frac{fL_2^*}{D}$	M_2	p_2/p^*	p_2 bar
0.50	0.843	5.01	2.13	2.35	1.07	0.87	0.53	2.01	4.74
0.55	0.814	4.87	1.93	2.52	0.73	0.53	0.59	1.80	4.53
0.60	0.748	4.70	1.76	2.67	0.49	0.29	0.67	1.55	4.14

Columna 1. Se parte de un valor arbitrario de M_1. En realidad la escogencia está limitada por la condición

$$0 < M_1 < M_{1E}\,.$$

Columna 2 y 3. Permiten calcular p_1 con las tablas isoentrópicas, puesto que se supone una tobera sin pérdidas.

Columna 4 y 5. Se calcula la presión crítica con las tablas de Fanno.

Columna 6 y 7. Con las tablas de Fanno se calcula fL_1^*/D y mediante la relación

$$\frac{fL_2^*}{D} = \frac{fL_1^*}{D} - \frac{fL}{D}$$

se obtiene el valor que permite calcular M_2 y p_2/p^* en las columnas 7 y 8.

Columna 10. Se obtiene la presión a la salida del tubo p_2. Si el valor obtenido es $p_2 = p_a$ (= 4.45 bar en el presente caso), el problema está resuelto; sino se empieza con un valor de M_1 tal que p_2 vaya a converger a p_a.

En el presente caso se ve que el valor de M_1 buscado estará comprendido entre

$$0.55 < M_1 < 0.60$$

Puesto que las tablas ya no dan más información, se puede interpolar para obtener el valor "exacto" de M_1.

$$M_1 = 0.55 + \frac{0.60 - 0.55}{4.53 - 4.14} \cdot (4.55 - 4.45)$$

$$= 0.55 + 0.05\,\frac{0.08}{0.39} = \underline{0.51}$$

Conocido $M_1 = 0.51$ se calculan ahora p_1, ρ_1 y, por consiguiente, el caudal mediante la fórmula

$$\dot m = A\rho_1 M_1\,\sqrt{kp_1/\rho_1}$$

ya utilizada.

2. Flujo supersónico

En el estudio del funcionamiento de un tubo adiabático con fricción vamos a considerar ahora el caso supersónico. Este se puede obtener montando a la salida de un depósito una tobera convergente-divergente. Hecho esto y en función de la razón A_c/A, donde A_c es el área de la garganta de la tobera, el número de Mach M_1 a la entrada del tubo *está determinado*, (7-83), así como p_1, θ_1, ρ_1, mediante las relaciones isoentrópicas. Supondremos que la rama seguida de la zona divergente es la supersónica.

El flujo en el tubo es pues supersónico de entrada. Lo que pasa después depende a la vez de la longitud del tubo y de la presión ambiental a la salida. En todo caso, si la longitud del tubo es igual a la longitud crítica, dada por (12.37), el número de Mach a la salida es la unidad y la presión p^* es dada por (12.42).

Observemos que la situación presente a la entrada al tubo es distinta del caso subsónico. En efecto ahora los valores de M_1, p_1, etc. en la sección (1) están determinados y son *únicos* para una tobera dada. El acomodo del flujo a las condiciones ambientales aguas abajo y a la longitud del tubo tendrán que hacerse en el propio tubo, sin alteración posible de las condiciones aguas arriba.

Vamos a considerar dos casos: cuando la longitud del tubo L es menor que la longitud crítica L^* y cuando le es mayor.

Longitud del tubo $L < L_1^*$. Dado un problema concreto, L_1^* se calcula mediante (12.37) como ya se dijo y la presión crítica según (12.42), ya que M_1 y p_1 son dados. El flujo en la tubería puede ser *continuo* (sin choque) en toda ella o no, según el valor de la presión ambiental p_a, pero conviene de todas maneras estudiar qué pasaría si fuese efectivamente continuo.

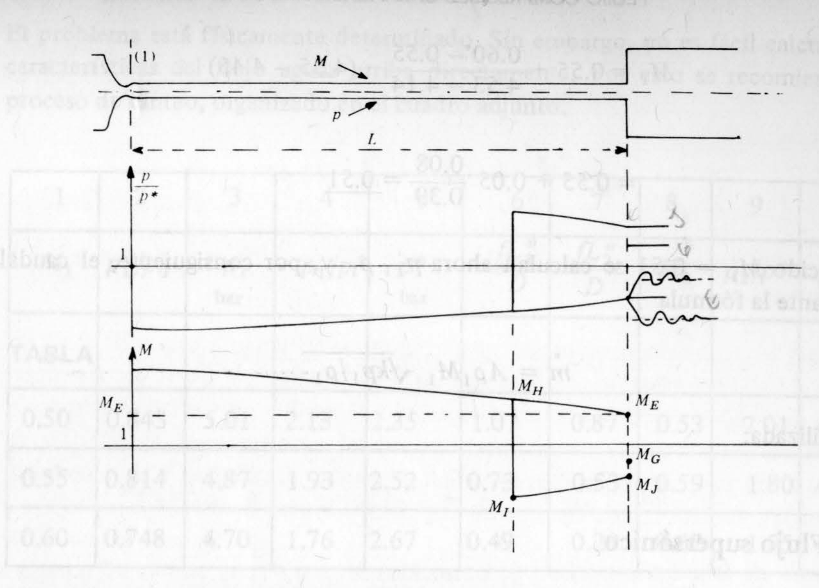


Figura 12.9.

En ese caso, en efecto, el número de Mach a la salida del tubo, M_s, alcanza un valor $M_E > 1$, perfectamente calculable. En efecto, conocidos L y L_1^* se obtiene

$$L_S^* = L_1^* - L$$

y por consiguiente, M_E es dado por (12.38). El flujo en el tubo estaría pues totalmente determinado y la presión del chorro $p_s = p_E$ se obtiene de (12.42) con $M_s = M_E$.

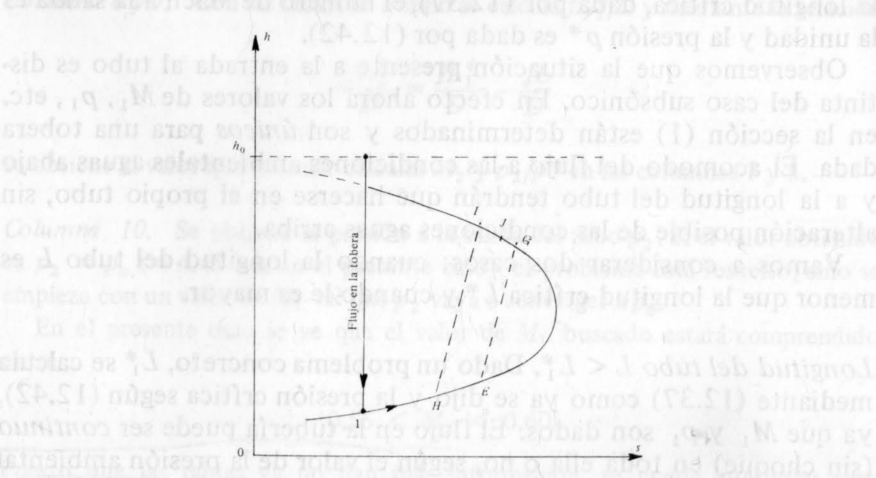


Figura 12.10.

¿Cuándo se produce efectivamente el flujo continuo que acabamos de describir? Ahora se puede responder: cuando la presión ambiental p_a sea

$$p_a \leqslant p_E$$

Cuando $p_a < p_E$, el flujo es continuo y supersónico con una presión de salida $p_s = p_E > p_a$ y el chorro se acomoda a la presión ambiental mediante ondas oblicuas de expansión fuera del tubo.

Cuando $p_a = p_E$, el chorro sales supersónico con una presión igual a la ambiental.

Si ahora se sigue aumentando p_a, conviene determinar un nuevo punto de referencia. Este se obtiene considerando qué pasaría si se produjese un choque justo a la salida del tubo: La presión después del choque p_E y las demás características del flujo serían facilmente calculables mediante las ecuaciones del choque normal estudiadas en el capítulo 7, puesto que las condiciones antes del choque M_E, p_E, etc. son conocidas. Por consiguiente, volviendo a la discusión de los valores de la presión ambiental, *supongamos que* $p_e < p_a < p_G$: Entonces el choque realmente no se produce, por ser p_a demasiado baja. El flujo sigue siendo supersónico en el tubo con ondas de choque fuera de él que permiten el paso de p_E a p_a. Es de observar que estos casos pueden ser seguidos también en la curva de Fanno correspondiente, y se sitúan siempre sobre la misma curva, puesto que el caudal

$$\dot{m} = A \rho_1 U_1$$

es constante.

Si $p_a = p_G$, se produce la onda de choque a la salida y el flujo sale subsónicamente al ambiente.

Supóngase ahora la presión $p_a > p_G$. La única manera de que el flujo en el tubo conduzca a esa presión ambiental es que aquella onda de choque que se producía a la salida, se adentre en el tubo. El flujo es pues supersónico hasta una sección HI, en la cual se produce un choque tal que el flujo subsónico subsiguiente conduce a una presión de salida $p_s = p_a$.

Ejemplo 3:

Se tiene un depósito de aire a presión constante de 15 bar y a la temperatura de 50°C. Con él se alimenta una tobera de Laval que tiene una garganta de 2 cm²

seguida de un tubo cilíndrico de área doble. Se supondrá que el flujo es sin fricción en la tobera y que el coeficiente medio de fricción en el tubo es de 0.01. Calcular la longitud máxima del tubo L_m, que corresponde a un flujo continuo. Si se toma ahora la longitud del tubo $L = 2/3\,L_m$ se pregunta:

a) Determinar cuál ha de ser la presión ambiental para que el tubo descargue supersónicamente en el ambiente sin ondas de expansión ni de choque.

b) Calcular la presión ambiental necesaria para que se forme una onda de choque justo a la salida del tubo.

c) Determinar la presión ambiental necesaria para que se forme un choque justo a la dalida de la tobera.

Solución:

Determinemos primero las condiciones de flujo a la salida de la tobera admitiendo que el flujo es supersónico.

Como $\dfrac{A}{A_c} = 2$ se obtiene, de las relaciones isoentrópicas,

$$M_1 = 2.20\,.$$

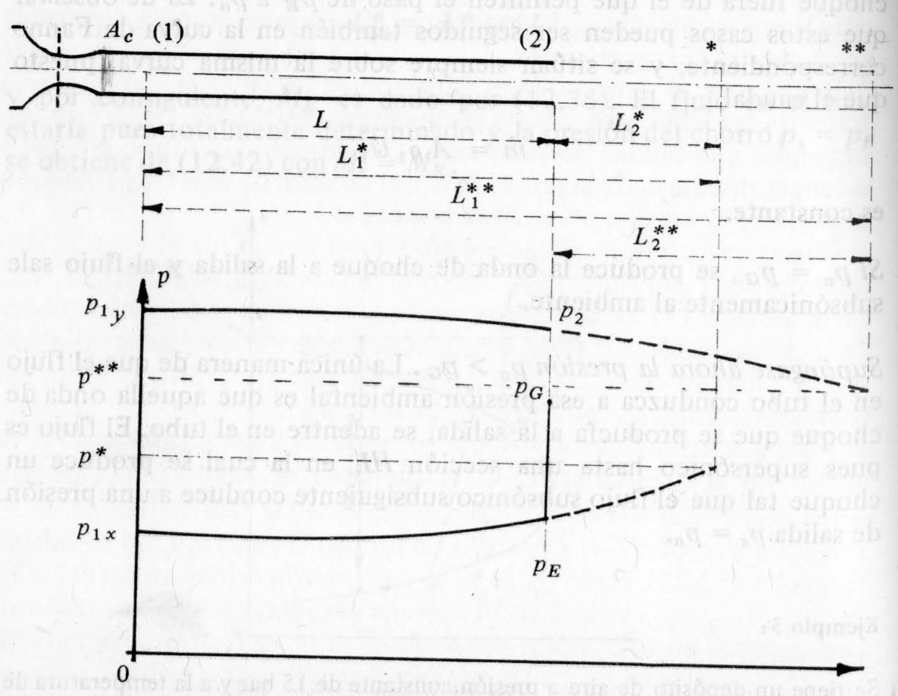


Figura 12.11.

La presión en la sección (1) se obtiene de la misma manera

$$\frac{p_1}{p_0} = 0.0935; \quad p_1 = 0.0935 \times 15 = 1.4 \text{ bar}$$

y de las tablas de Fanno, conocido M_1

$$\frac{FL_1^*}{D} = 0.361; \quad L_m = L_1^* = 0.361\,\frac{0.02255}{0.01} = 0.815 \text{ m} = 81.5 \text{ cm}$$

ya que el diámetro es

$$D = \sqrt{\frac{16}{\pi}} = 2.255 \text{ cm}$$

La presión en la sección crítica se obtiene asimismo, conocido M_1

$$\frac{p_1}{p^*} = 0.355; \quad p^* = \frac{1.4}{0.355} = 3.94 \text{ bar.}$$

a) Con estos datos se determinan las características de la sección (2). En efecto, la longitud del tubo será

$$L = \frac{2}{3}\,L_m = 54.3 \text{ cm}$$

y por consiguiente,

$$L_2^* = L_m - L = 27.2 \text{ cm}\,.$$

De ahí que

$$\frac{fL_2^*}{D} = \frac{0.01 \times 0.272}{0.02255} = 0.1208$$

Luego, de las tablas de Fanno

$$M_2 = 1.49, \quad \frac{p_E}{p^*} = 0.61 \Longrightarrow p_E = 0.61 \times 3.94 = 2.4 \text{ bar}$$

Para que el tubo descargue sin ondas de expansión ni de choque, la presión ambiental ha de ser

$$p_a = p_E = 2.4 \text{ bar}\,.$$

b) Si se forma una onda de choque normal a la salida del tubo, las características antes del choque serán dadas por

$$M_{2x} = M_2 = 1.49, \quad p_{2x} = p_E = 2.4 \text{ bar.}$$

De las tablas de choque normal obtenemos entonces

$$M_{2y} = 0.703, \quad \frac{p_{2y}}{p_{2x}} = 2.42 \Longrightarrow p_G = p_{2y} = 2.42 \times 2.4 = 5.8 \text{ bar}$$

Para que se produzca una onda de choque normal a la salida del ducto, la presión ambiental ha de ser

$$p_G = p_{2y} = 5.8 \text{ bar}.$$

c) Suponiendo que se produce una onda de choque a la salida de la tobera, vamos a determinar el flujo en todo el tubo.

Las características del flujo antes del chorro son

$$M_{1x} = M_1 = 2.20 \quad , \quad p_{1x} = p_1 = 1.4 \text{ bar}.$$

Luego, después del choque

$$M_{1y} = 0.547, \quad \frac{p_{1y}}{p_{1x}} = 5.48 \Longrightarrow p_{1y} = 5.48 \times 1.4 = 7.68 \text{ bar}$$

Con estos valores, calculamos las características en una *nueva* sección crítica, ya que el choque ha modificado las condiciones de estancamiento. De las tablas de Fanno

$$\frac{fL_1^{**}}{D} = 0.72 \qquad L_1^{**} = 0.72 \, \frac{0.02255}{0.01} = 1.65 \text{ m}.$$

$$\frac{p_{1y}}{p^{**}} = 1.96 \Longrightarrow p^{**} = \frac{7.68}{1.96} = 3.92 \text{ bar}.$$

De ahí deducimos, para la sección (2)

$$L_2^{**} = L_1^{**} - L = 1.650 - 0.543 = 1.107 \text{ m}.$$

Luego

$$\frac{fL_2^{**}}{D} = \frac{0.01 \times 110.7}{2.255} = 0.49 \Longrightarrow M_2 = 0.60$$

Asimismo, obtenemos

$$\frac{p_2}{p^{**}} = 1.736 \qquad p_2 = 1.763 \times 3.92 = 6.92 \text{ bar}$$

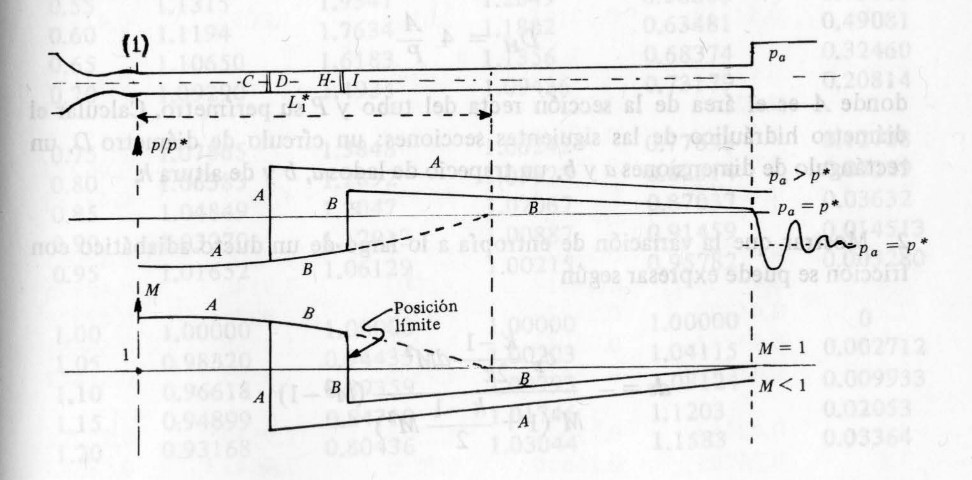
En este caso, la presión ambiental habrá de ser

$$p_a = p_2 = 6.92 \text{ bar}.$$

2\. b. *Longitud del tubo $L > L_1^*$*. Ante todo se puede ver que, en este caso, un flujo supersónico continuo a todo lo largo del tubo es imposible. Ello implicaría en efecto, como se dijo al inicio de este capítulo, llegar a la condición sónica $M = 1$ y seguir moviéndose sobre la misma curva de Fanno con disminución de la entropía lo cual es imposible, o cambiar de curva de Fanno, esto es disminuir el caudal, lo cual también es imposible, ya que las condiciones en la sección (1) son inalterables.

Así pues, en este caso habrá un choque, y *su posición* en el tubo dependerá de la presión ambiental a la salida. Se seguirán comparando las presiones a p^* que *es la presión* previamente calculada si $L_1^* = L$ y discutiremos los varios casos que se presentan al variar p_a.

Supongamos $p_a > p^*$. Después del choque que se produce en el interior del tubo, el flujo es subsónico. Luego la presión a la salida p_s



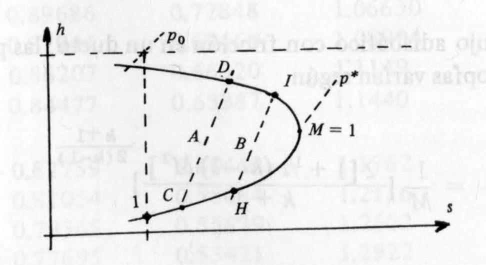


Figura 12.12.

CURVA DE FANNO PARA $k = 1.4$

M	θ/θ^*	p/p^*	p_0/p_0^*	U/U^*	fL/D
1.75	0.74419	0.49295	1.3865	1.5097	0.22504
1.80	0.72816	0.47407	1.4390	1.5360	0.24189
1.85	0.71238	0.45623	1.4952	1.5614	0.25832
1.90	0.69686	0.43936	1.5552	1.5861	0.27433
1.95	0.68162	0.42339	1.6193	1.6099	0.28989
2.00	0.66667	0.40825	1.6875	1.6330	0.30499
1.05	0.65200	0.39389	1.7600	1.6553	0.31965
2.10	0.63762	0.38024	1.8369	1.6769	0.33385
2.15	0.62354	0.36728	1.9185	1.6977	0.34760
2.20	0.60976	0.35494	2.0050	1.7179	0.36091
2.25	0.59627	0.34319	2.0964	1.7374	0.37378
2.30	0.58309	0.33200	2.1931	1.7563	0.38623
2.35	0.57021	0.32133	2.2953	1.7745	0.39826
2.40	0.55762	0.31114	2.4031	1.7922	0.40989
2.45	0.54533	0.30141	2.5168	1.8092	0.42113
2.50	0.53333	0.29212	2.6367	1.8257	0.43197
2.55	0.52163	0.28323	2.7630	1.8417	0.44247
2.60	0.51020	0.27473	2.8960	1.8571	0.45259
2.65	0.49906	0.26658	3.0359	1.8721	0.46237
2.70	0.48820	0.25878	3.1830	1.8865	0.47182
2.75	9.47761	0.25131	3.3376	1.9005	0.48095
2.80	0.46729	0.24414	3.5001	1.9140	0.48976
2.85	0.45723	0.23726	3.6707	1.9271	0.49828
2.90	0.44743	0.23066	3.8498	1.9398	0.50651
2.95	0.43788	0.22431	4.0376	1.9521	0.51447
3.0	0.42857	0.21822	4.2346	1.9640	0.52216
3.5	0.34783	0.16850	6.7896	2.0642	0.58643
4.0	0.28571	0.13363	10.719	2.1281	0.63306
4.5	0.23762	0.10833	16.562	2.1936	0.66764
5.0	0.20000	0.08944	25.000	2.2361	0.69381
6.0	0.14634	0.06376	53.180	2.2953	0.72987
7.0	0.11111	0.04762	104.14	2.3333	0.75281
8.0	0.08696	0.03686	190.11	2.3591	0.76820
9.0	0.06977	0.02935	327.19	2.3772	0.77898
10.00	0.05714	0.02390	535.94	2.3905	0.78683
∞	0	0	∞	2.4495	0.82153

12.4 Flujo en un ducto con intercambio de calor

Vamos a estudiar ahora el flujo en un ducto de sección constante y sin fricción, pero donde se considera apreciable el intercambio de calor con el exterior.

Las ecuaciones básicas serán las ya establecidas. Las enumeramos aquí, adaptadas al presente problema:

Ecuación de la energía. De (12.7) se tiene

$$q = h_2 - h_1 + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2} = c_p\,(\theta_2 - \theta_1) + \frac{U_2^2 - U_1^2}{2}$$

$$= c_p(\theta_{02} - \theta_{01}) \qquad (12.45)$$

donde θ_{02} y θ_{01} son las temperaturas de estancamiento, definidas en general por

$$\theta_0 = \theta + \frac{U^2}{2c_p} \qquad (12\text{-}46)$$

Continuidad. De (12.1), tenemos

$$\rho_1 U_1 = \rho_2 U_2 = \frac{\dot{m}}{A} \qquad (12\text{-}47)$$

Cantidad de movimiento. A partir de (12.5), si $f = 0$, se puede integrar y se tiene

$$p_2 - p_1 = \frac{\dot{m}}{A}\,(U_2 - U_1). \qquad (12\text{-}48)$$

Ecuación de estado. Escribimos

$$\frac{p_1}{\rho_1\theta_1} = \frac{p_2}{\rho_2\theta_2}. \qquad (12\text{-}49)$$

Básandose en las ecuaciones anteriores lo primero que se puede hacer es encontrar las características del flujo en una sección cualquiera, conocidas ésas en una sección dada. Ese es en realidad el problema fundamental del flujo en un ducto. En el presente caso observamos que las ecuaciones (12.47), (12.48) y (12.49) son las mismas que se utilizaron en el capítulo 7 para deducir las relaciones a través de una *onda de choque* en función de M_1 y M_2. Por consiguiente podemos escribir directamente los siguientes resultados:

De (7-87), la relación de presiones

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + k\ M_1^2}{1 + k\ M_2^2} \qquad (12\text{-}50)$$

de (7.89), la relación de temperaturas, o entalpías,

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{M_2^2}{M_1^2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 = \frac{M_2^2}{M_1^2}\frac{(1 + k\,M_1^2)^2}{(1 + k\,M_2^2)^2} \qquad (12\text{-}51)$$

De esas ecuaciones deducimos

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1}\,\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{M_1^2}{M_2^2}\,\frac{1 + k\ M_2^2}{1 + k\,M_1^2}\,. \qquad (12\text{-}52)$$

Es de observar que la relación entre los números de Mach M_1 y M_2 no es la misma aquí que en el caso de la onda de choque normal. En efecto la ecuación de la energía no es la misma en ambos casos ya que el fenómeno del choque se supone adiabático y en la presente sección se hace la hipótesis contraria.

Curva de Rayleigh. Antes de encontrar como relacionar M_1 y M_2, vamos a tratar de seguir la evolución del flujo en el ducto en un diagrama *h–s.* Para ello, evaluamos separadamente la entropía y la entalpía en función del número de Mach.

Para la entropía de un gas perfecto, es sabido que se tiene

$$s_2 - s_1 = c_p\ ln\ \frac{\theta_2}{\theta_1} - R\,ln\,\frac{p_2}{p_1}\,, \qquad (12\text{-}53)$$

de donde, sustituyendo (12.50) y (12.51) y simplificando

$$\frac{s_2 - s_1}{c_p} = 2ln\ \frac{M_2}{M_1}\ \frac{1 + k\,M_1^2}{1 + k\,M_2^2} - \frac{k-1}{k}\ ln\ \frac{1 + k\,M_1^2}{1 + k\,M_2^2}, \qquad (12\text{-}54)$$

Si se hace $s_2 = s$ y $M_2 = M$ podemos, también, escribir,

$$\frac{s - s_1}{c_p} = 2ln\ \frac{M}{M_1}\ \frac{1 + k\,M_1^2}{1 + k\,M^2} - \frac{k-1}{k}\ ln\ \frac{1 + k\ M_1^2}{1 + k\ M^2} \qquad (12\text{-}55)$$

Por otra parte, de (12.51) tenemos para las entalpías,

$$\frac{h}{h_1} = \frac{M^2}{M_1^2}\,\frac{(1 + k\,M_1^2)^2}{(1 + k\,M^2)^2} \qquad (12\text{-}56)$$

Las ecuaciones (12.55) y (12.56) constituyen una representación paramétrica de una curva, en el plano *h–s,* llamada *curva de Rayleigh,* siendo el número de Mach, *M,* el parámetro. Esta curva es el lugar geométrico de los puntos representativos de las condiciones de flujo en el ducto, para valores cualesquiera del calor introducido. Para una sección dada (2) ese calor fijará el punto de la curva de que se trata.

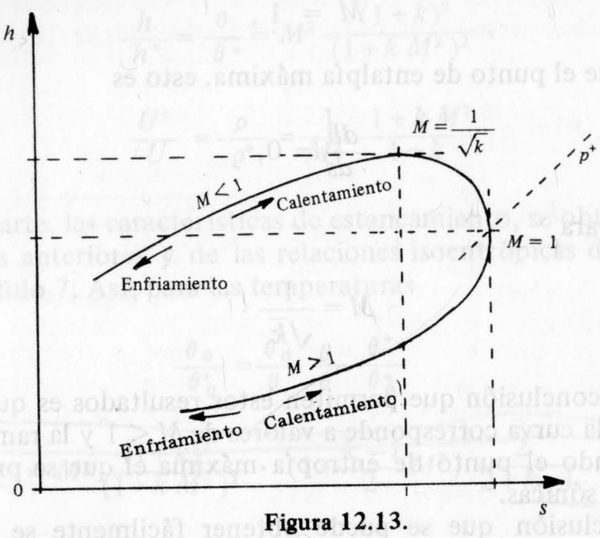


Figura 12.13.

Pasemos a estudiar algunas *propiedades de la curva de Rayleigh.* Interesa en primer lugar, encontrar los puntos de máxima entropía y de máxima entalpía. Para ello se calculará *dh/ds,* evaluando separadamente *ds/dM* y *dh/dM.*

A partir de (12-55) se obtiene, derivando y simplificando,

$$\frac{1}{c_p}\,\frac{ds}{dM} = 2\ \frac{1 + kM^2 - 2\,kM^2}{M\,(1 + kM^2)^2}\cdot\frac{1 + kM^2}{M} + \frac{k-1}{k}\ \frac{2kM}{1 + kM^2}$$

$$= 2\ \frac{1 - M^2}{M(1 + kM^2)}\,. \qquad (12\text{-}57)$$

Asimismo, de (12.56)

$$\frac{1}{h_1}\,\frac{dh}{dM} = \frac{2\,(1 + k\,M_1^2)^2}{M_1^2}\ \frac{M\,(1 - k\,M^2)}{(1 + k\,M^2)^3}\,. \qquad (12\text{-}58)$$

De esos valores se obtiene finalmente,

$$\frac{dh}{ds} = \text{const.}\ \frac{M^2\,(1 - k\,M^2)}{(1 - M^2)\,(1 + k\,M^2)^2} \qquad (12\text{-}59)$$

Ahora vemos que el punto de *entropía máxima,* que corresponde a

$$\frac{dh}{ds} = \infty,$$

se obtiene para

$$M = 1, \tag{12-60}$$

mientras que el punto de entalpía máxima, esto es

$$\frac{dh}{ds} = 0,$$

se obtiene para

$$M = \frac{1}{\sqrt{k}}. \tag{12-61}$$

La primera conclusión que permiten estos resultados es que la rama superior de la curva corresponde a valores de $M < 1$ y la rama inferior $M > 1$, siendo el punto de entropía máxima el que se presenta en condiciones sónicas.

Otra conclusión que se puede obtener fácilmente se refiere al sentido del desplazamiento del punto representativo de las condiciones en una sección, a medida que ésta se la toma más aguas abajo. Si observamos que, debido a la *ausencia de fricción,* las variaciones (reversibles) de entropía se producen únicamente por intercambio de calor, y recordando (7.14),

$$ds = \frac{dQ}{\theta}, \tag{12-62}$$

concluimos que un aumento de entropía *ds* proviene del *calor recibido dQ.* Luego, en ambas ramas de la curva de Rayleigh un calentamiento del fluido lo acercará a las condiciones sónicas, mientras que un enfriamiento tendrá el efecto contrario.

Condiciones críticas y sistema de referencia. Como en el caso de la Sección 12.3 vemos que si hay calentamiento puede existir una sección del ducto en que las condiciones críticas ($M = 1$) se produzcan. Resulta conveniente tomar las características en esa sección (cuyos valores se indicarán con +) como valores de referencia. Dado que corresponden a $M = 1$ se obtienen los valores en otra sección, donde el número de Mach es M, a partir de (12.50), (12.51) y (12.52).

Para la presión

$$\frac{p}{p^+} = \frac{1+k}{1+k\,M^2} \tag{12-63}$$

y asimismo

$$\frac{h}{h^+} = \frac{\theta}{\theta^+} = M^2\,\frac{(1+k)^2}{(1+k\,M^2)^2}, \tag{12-64}$$

$$\frac{U^+}{U} = \frac{\rho}{\rho^+} = \frac{1}{M^2}\,\frac{1+k\,M^2}{1+k} \tag{12-65}$$

Por otra parte, las características de estancamiento, se obtienen de las ecuaciones anteriores y de las relaciones isoentrópicas desarrolladas en el capítulo 7. Así, para las temperaturas

$$\frac{\theta_0}{\theta_0^+} = \frac{\theta_0}{\theta}\,\frac{\theta}{\theta^+}\,\frac{\theta^+}{\theta_0^+}$$

$$= M^2\,\frac{(1+k)^2}{(1+k\,M^2)^2}\cdot\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)\frac{2}{2+k-1},$$

o sea

$$\frac{\theta_0}{\theta_0^+} = \frac{2\,M^2\,(1+k)}{(1+k\,M^2)^2}\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right). \tag{12-66}$$

Para las presiones, asimismo,

$$\frac{p_0}{p_0^+} = \frac{p_0}{p}\,\frac{p}{p^+}\,\frac{p^+}{p_0^+} = \frac{1+k}{1+k\,M^2}\left[\frac{1+\frac{k-1}{2}M^2}{\frac{1+k}{2}}\right]^{\frac{k}{k-1}} \tag{12-67}$$

Estas fórmulas son fácilmente tabulables, y acompañan la curva de Rayleigh en forma cuantitativa. En los ejemplos y en los ejercicios se aclara su utilización.

Ejemplo 4:

Por un ducto entra aire con una presión de 6 bar, una temperatura de $\theta_1 = -25°C$ y un número de Mach de 0.4. Se agrega calor al ducto de manera que la temperatura de salida sea de 30°C. Admitiendo que la fricción es despreciable

encontrar el número de Mach, y la presión de estancamiento a la salida y la cantidad de calor agregado si $c_p = 1008$ J/kg°K.

Solución:

Para fines de comparación con el resultado, vale la pena calcular de antemano la presión de estancamiento inicial. De las relaciones isoentrópicas (Capítulo 7).

$$p_{01} = \left(\frac{p_{01}}{p_1}\right)_{M_1} p_1 = \frac{6}{0.896} = 6.7 \text{ bar}$$

(1) (2) θ_1 θ^+ $M_1 = 0.4$ M_2 $M = 1$

Figura 12.14.

Para determinar el número de Mach a la salida, calculamos la relación θ_2/θ^+ como sigue

$$\frac{\theta_2}{\theta^+} = \frac{\theta_2}{\theta_1}\left(\frac{\theta_1}{\theta^+}\right)_{M_1} = \frac{303}{248} \times 0.615 = 0.75$$

Luego, de la tabla de Rayleigh, $M_2 \cong 0.47$.

En cuanto a la presión de estancamiento

$$p_{02} = \left(\frac{p_{02}}{p_0^+}\right)_{M_2}\left(\frac{p_0^+}{p_{01}}\right)_{M_1}\left(\frac{p_{01}}{p_1}\right)_{M_1} p_1 = \frac{1.126 \times 6}{1.157 \times 0.896} = 6.53 \text{ bar}$$

Se observará, comparando con p_{01}, que la presión de estancamiento ha disminuido, resultado que es general como se puede apreciar sobre la curva de Rayleigh.

Para calcular el calor recibido en el proceso, determinamos las temperaturas de estancamiento.

$$\theta_{01} = \left(\frac{\theta_{01}}{\theta_1}\right)_{M_1} \theta_1 = \frac{248}{0.969} = 256°\text{K}$$

$$\theta_{02} = \left(\frac{\theta_{02}}{\theta_2}\right)_{M_2} \theta_2 = \frac{303}{0.957} = 316°\text{K}.$$

El calor recibido es, pues,

$$q = c_p(\theta_{02} - \theta_{01}) = 1008\,(316 - 256) = 1008 \times 60°$$

$$= 60000 \text{ J/kg} = 60 \text{ kJ/kg}.$$

Tabla 12.2.

CURVA DE RAYLEÌGH, $k = 1.4$

M	θ_0/θ_0^+	θ/θ^+	p/p^+	p_0/p_0^+	U/U^+
0	0	0	2.4000	1.2679	0
0.05	0.01192	0.01430	2.3916	1.2657	0.00598
0.10	0.04678	0.05602	2.3669	1.2591	0.02367
0.15	0.10196	0.12181	2.3267	1.2486	0.05235
0.20	0.17355	0.20661	2.2727	1.2346	0.09091
0.25	0.25684	0.30440	2.2069	1.2177	0.13793
0.30	0.34686	0.40887	2.1314	1.1985	0.19183
0.35	0.43894	0.51413	2.0487	1.1779	0.25096
0.40	0.52903	0.61515	1.9608	1.1566	0.31372
0.45	0.61393	0.70803	1.8699	1.1351	0.37865
0.50	0.69136	0.79012	1.7778	1.1140	0.44445
0.55	0.75991	0.85987	1.6860	1.09397	0.51001
0.60	0.81892	0.91670	1.5957	1.07525	0.57447
0.65	0.86833	0.96081	1.5080	1.05820	0.63713
0.70	0.90850	0.99289	1.4235	1.04310	0.69751
0.75	0.94009	1.01403	1.3427	1.03010	0.75525
0.80	0.96394	1.02548	1.2658	1.01934	0.81012
0.85	0.98097	1.02854	1.1931	1.01091	0.86204
0.90	0.99207	1.02451	1.1246	1.04485	0.91097
0.95	0.99814	1.01463	1.06030	1.00121	0.95692
1.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1.05	0.99838	0.98161	0.94358	1.00121	1.04030
1.10	0.99392	0.96031	0.89086	1.00486	1.07795
1.15	0.98721	0.93685	0.84166	1.01092	1.1131
1.20	0.97872	0.91185	0.79576	1.01941	1.1459
1.25	0.96886	0.88581	0.75294	1.03032	1.1764
1.30	0.95798	0.85917	0.71301	1.04365	1.2050
1.35	0.94636	0.83227	0.67577	1.05943	1.2316
1.40	0.93425	0.80540	0.64102	1.07765	1.2564
1.45	0.92184	0.77875	0.60860	1.0983	1.2796
1.50	0.90928	0.75250	0.57831	1.1215	1.3012
1.55	0.89669	0.72680	0.55002	1.1473	1.3214
1.60	0.88419	0.70173	0.52356	1.1756	1.3403
1.65	0.87184	0.67738	0.49881	1.2066	1.3580
1.70	0.85970	0.65377	0.47563	1.2402	1.3745

CURVA DE REYLEIGH, $k = 1.4$

M	θ_0/θ_0^+	θ/θ^+	p/p^+	p_0/p_0^+	U/U^+
1.75	0.84785	0.63096	0.45390	1.2767	1.3901
1.80	0.83628	0.60894	0.43353	1.3159	1.4046
1.85	0.82504	0.58773	0.41440	1.3581	1.4183
1.90	0.81414	0.56734	0.39643	1.4033	1.4311
1.95	0.80359	0.54774	0.37954	1.4516	1.4432
2.00	0.79339	0.52893	0.36364	1.5031	1.4545
2.05	0.78355	0.51087	0.34866	1.5579	1.4652
2.10	0.77406	0.49356	0.33454	1.6161	1.4753
2.15	0.76493	0.47696	0.32122	1.6780	1.4849
2.20	0.75614	0.46106	0.30864	1.7434	1.4939
2.25	0.74767	0.44582	0.29675	1.8128	1.5024
2.30	0.73954	0.43122	0.28551	1.8860	1.5104
2.35	0.73173	0.41724	0.27487	1.9634	1.5180
2.40	0.72421	0.40383	0.26478	2.0450	1.5252
2.45	0.71700	0.39100	0.25523	2.1311	1.5320
2.50	0.71005	0.37870	0.24616	2.2218	1.5385
2.55	0.70340	0.36691	0.23754	2.3173	1.5446
2.60	0.69699	0.35561	0.22936	2.4177	1.5505
2.65	0.69084	0.34478	0.22158	2.5233	1.5560
2.70	0.68494	0.33439	0.21417	2.6342	1.5613
2.75	0.67926	0.32442	0.20712	2.7508	1.5663
2.80	0.67380	0.31486	0.20040	2.8731	1.5711
2.85	0.66855	0.30568	0.19399	3.0013	1.5757
2.90	0.66350	0.29687	0.18788	3.1358	1.5801
2.95	0.65865	0.28841	0.18205	3.2768	1.5843
3.00	0.65398	0.28028	0.17647	3.4244	1.5882
3.50	0.61580	0.21419	0.13223	5.3280	1.6198
4.00	0.58909	0.16831	0.10256	8.2268	1.6410
4.50	0.56983	0.13540	0.08177	12.502	1.6559
5.00	0.55555	0.11111	0.06667	18.634	1.6667
6.00	0.53633	0.07849	0.04669	38.946	1.6809
7.00	0.52437	0.05826	0.03448	75.414	1.6896
8.00	0.51646	0.04491	0.02649	136.62	1.6954
9.00	0.51098	0.03565	0.02098	233.88	1.6993
10.00	0.50702	0.02897	0.01702	381.62	1.7021
∞	0.48980	0	0	∞	1.7143

CAPITULO 13

Teoría de la capa límite

13.1 Introducción

En los capítulos anteriores se ha podido apreciar cuán difícil se hace el estudio del movimiento de un flujo viscoso en más de una dimensión. Incluso en el caso de flujo no turbulento, la integración exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes sólo se logra en problemas muy aislados.

Uno de los mayores adelantos en esta dificultad fundamental es debido a Prandtl quien, en 1904, mostró cómo, para números de Reynolds "grandes" los esfuerzos viscosos pueden ser totalmente despreciados "lejos" de las paredes[1]. Según él, se puede considerar el fluido como ideal lejos de todo objeto sólido y por consiguiente estudiar el movimiento del fluido como si éste fuese ideal, esto es, según métodos ya expuestos, a *condición* de completar la solución, en una "capa" vecina de las paredes, mediante el uso adecuado de las ecuaciones completas del fluido real.

En esta capa, llamada *"capa límite"*, (Grenzschicht), por Prandtl, es donde la viscosidad del fluido se manifiesta de manera terminante, pudiendo ser el flujo en ella laminar o turbulento.

[1] L. Prandtl, "Verh. des 3. Intern. *Math. Kongr*". Heidelberg, 1904.
L. Prandtl, "Sobre Movimiento de Fluidos de Viscosidad muy pequeña", *Boletín No. 12*, Sociedad Venezolana de Ingeniería Hidráulica, junio, 1968.

El propósito de este capítulo es justamente estudiar las propiedades y consecuencias de la existencia de esta capa viscosa que rodea todo cuerpo sumergido en movimiento.

Matemáticamente hablando se verá que si bien las ecuaciones de Navier-Stokes han de ser escritas en forma completa con todos sus términos "viscosos" el hecho de que la capa límite sea delgada permite una simplificación notable del problema.

Más que matemáticamente, sin embargo, es en su interpretación física que el concepto de capa límite ha resultado fecundo. Por esta razón, en un primer contacto con el tema, se presentarán varios criterios de tipo intuitivo. dejándose para después la cuantificación de los fenómenos observados.

13.2 Descripción física

Para hacer más concreto el fenómeno, considérese una lámina plana colocada en un flujo uniforme, praralelamente a la velocidad.

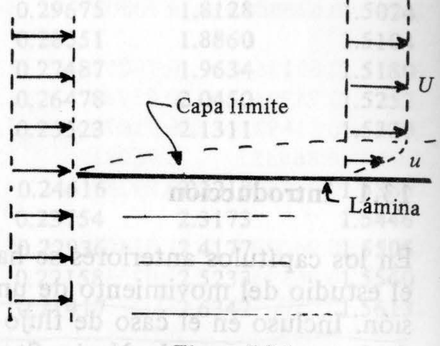


Figura 13.1.

El fluido que circula en la vecindad de la lámina resulta "frenado" por ella, debido a la fricción viscosa. La capa de fluido en la cual este efecto se hace sentir lo que se llama la *capa límite,* y su espesor va creciendo aguas abajo, porque cada vez un número mayor de capas del fluido son frenadas por las vecinas.

La *velocidad* en la capa límite es menor que en el flujo ideal exterior, y encontrar la *distribución de velocidades* será uno de los proble-

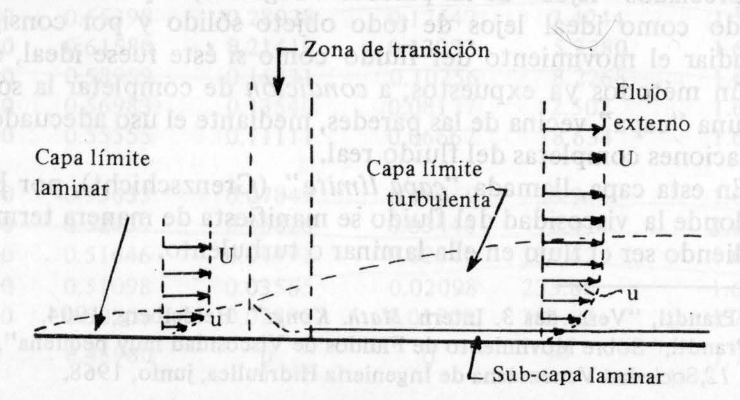


Figura 13.2.

mas cuantitativos de la "Teoría" de la capa límite. Cuando la velocidad en la capa límite se haga suficientemente alta, el flujo en ella pasará de laminar a turbulento mediante una zona de transición. Además, como en todo flujo turbulento es lógico esperar que si la capa límite es turbulenta, esa turbulencia disminuirá cerca de la pared, dando lugar a la llamada *sub-capa laminar.*

Para completar esa breve descripción diremos que la *presión* en la capa límite es la que corresponde al flujo externo, (ideal), que la rodea. En el caso de una lámina plana esa presión es pues constante, como se demostrará más abajo.

Si en cambio se tiene una superficie curva, un fenómeno adicional se presenta, fenómeno conocido desde mucho tiempo, pero que sólo los mecanismos existentes en la capa límite permiten explicar. Se trata de la llamada *separación de la capa límite* en las zonas aguas abajo de un obstáculo.

Para comprender cómo se produce físicamente esta separación, considérese el caso del flujo *real* y bien observado de un fluido alrededor de un cilindro.

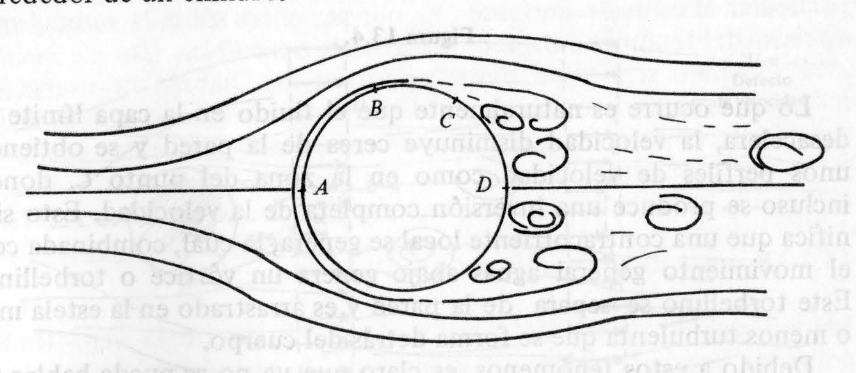


Figura 13.3.

Aguas arriba del obstáculo, las líneas de corriente presentan una disposición muy semejante a la obtenida en el capítulo 5 para un flujo potencial. Se cumple entonces en esa zona, de una manera muy precisa, el supuesto de que el fluído se mueve "como si fuese ideal".

Sin embargo, en las *inmediaciones* del cilindro, cara aguas arriba, se forma la *capa límite*, esto es, la zona delgada antes descrita en la cual la viscosidad sí se hace sentir. Esta capa límite va creciendo en espesor y en el tramo *A-B* se mueve de acuerdo con el gradiente de presión, esto es, desde *A* donde la presión es mayor hasta *B*, donde es menor. La variación de la presión es conocida, (5-50) .

Ahora bien, ¿qué pasa en la capa límite después del punto *B*, dado que entonces, de *B* a *D*, la presión vuelve a aumentar en el flujo potencial circundante?

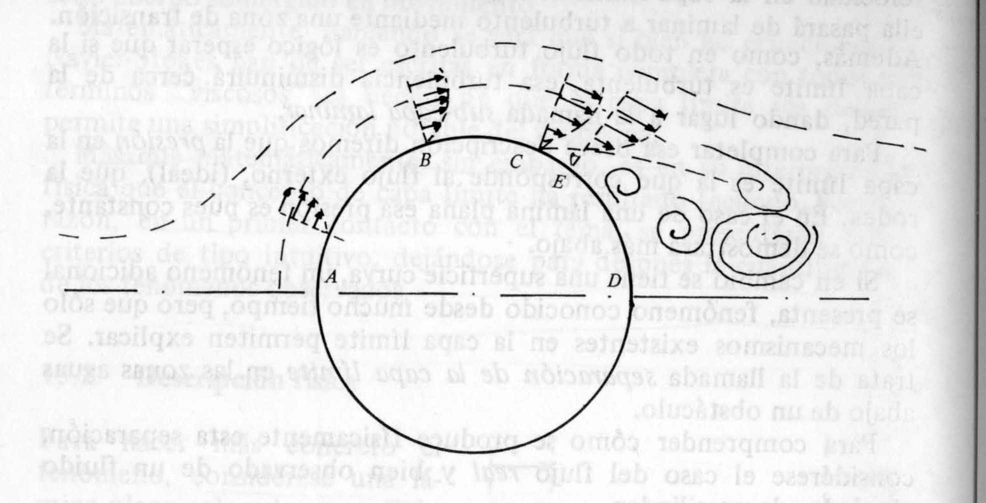


Figura 13.4.

Lo que ocurre es naturalmente que el fluido en la capa límite se desacelera, la velocidad disminuye cerca de la pared y se obtienen unos perfiles de velocidad como en la zona del punto *C*, donde incluso se produce una inversión completa de la velocidad. Esto significa que una contracorriente local se genera, la cual, combinada con el movimiento general aguas abajo genera un vórtice o torbellino. Este torbellino se separa de la pared y es arrastrado en la estela más o menos turbulenta que se forma detrás del cuerpo.

Debido a estos fenómenos, es claro que ya no se puede hablar de *capa límite* cerca de la pared del objeto, en el tramo *C-D*. Esta se *separó* del cuerpo en la zona del punto *C*, siendo barrida aguas abajo también, constituyendo más o menos una frontera entre la zona potencial del flujo y la estela propiamente dicha, y desvaneciéndose además su identidad rápidamente, al alejarse del cuerpo.

Esta descripción, puramente cualitativa es una especie de síntesis obtenida al observar el fenómeno con distintos sistemas de visualización, conjuntamente con los resultados de los análisis matemáticos que se han podido llevar a cabo. Ha tomado en realidad muchas horas de trabajo y muchas personas para asegurarse que lo *descrito* anteriormente es lo que realmente pasa. Descripción por supuesto que, a su vez, levanta otro número grande de interrogantes. No cabe duda que un análisis matemático completo de estos fenómenos ha de ser muy complejo, y no se puede decir que hoy por hoy se tenga una descripción cuantitativa completa de lo que ocurre.

Por las razones expuestas, se tratará en el siguiente estudio, de partir de lo más simple a lo más complicado, y este texto ciertamente no pretenderá agotar el tema. Dado que si se tiene una superficie plana, como se empezó a considerar primero, no hay gradiente de presión y por consiguiente no se produce *separación* de la capa límite es claro que conviene analizar primero este caso.

Antes de hacerlo, sin embargo, es útil decir algo más de la *estela* que se produce detrás de un objeto. Es evidente que la estela será en *general* turbulenta, con un aparente total desorden. Sin embargo, se puede estudiar experimentalmente la distribución de velocidades, y observar cómo, aguas abajo, aparece un "defecto de velocidad", esto es, la estela es menos rápida que el movimiento general y va ensanchándose aguas abajo, mientras el "defecto de velocidad" es la manifestación clara de la existencia sobre el cuerpo de una *fuerza de arrastre*, causada por el fluido; y por otra parte, gracias a la viscosidad, la estela se va mezclando con el resto del flujo, mediante un fenómeno de *difusión*, perdiendo así, poco a poco su identidad.

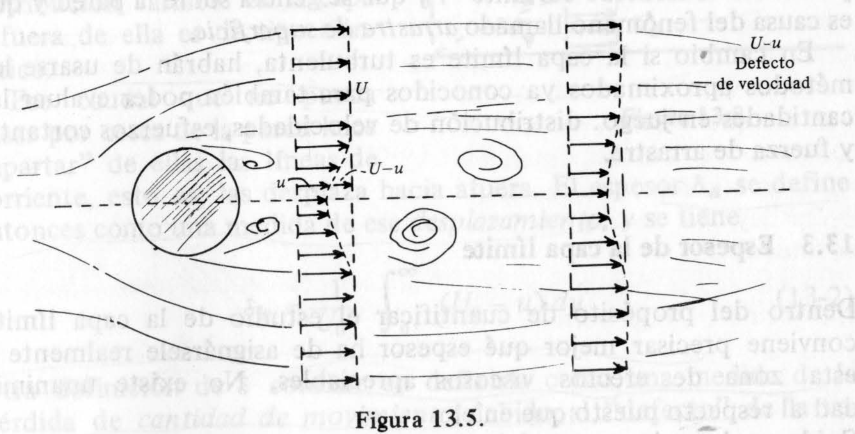


Figura 13.5.

Puede ocurrir, sin embargo, que la estructura de la estela no sea tan desordenada como se ha dado a pensar. En efecto, los vórtices que se generan al separarse la capa límite, son arrastrados aguas abajo, en forma alternante, uno de cada lado, y, para ciertos números de Reynolds, conservan su identidad dentro de la estela sobre distancias considerables. Se dice que se tiene entonces una *estela de vórtices*. El movimiento del fluido en esta estela presenta una regularidad notable. Dada una estela ya establecida, con vórtices y puesto que ello no está directamente bajo el efecto de pared alguna, es concebible que pueda estudiarse su estructura mediante un planteamiento de flujo rotacional ideal. Esto es lo que hizo von Kárman en una bella teoría que será presentada en otra parte.

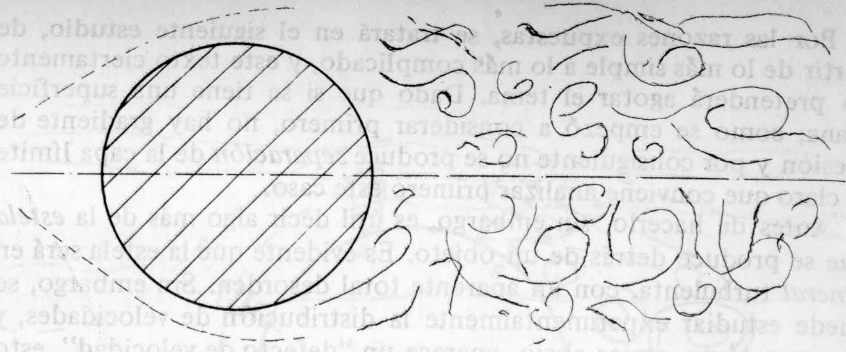


Figura 13.6.

Antes de terminar, cabe precisar lo que se buscará en una "teoría" de la capa límite. En primer lugar, habrá de considerarse el caso de una capa límite laminar. Entonces, las ecuaciones generales del movimiento de un fluido viscoso debieran permitir encontrar la distribución de velocidades en la zona del fluido cerca de la pared, la distribución de presiones, y, más generalmente, de los esfuerzos. En particular el esfuerzo cortante τ_0 que se genera sobre la pared y que es causa del fenómeno llamado *arrastre de superficie.*

En cambio si la capa límite es turbulenta, habrán de usarse los métodos aproximados ya conocidos para también poder evaluar las cantidades en juego: distribución de velocidades, esfuerzos cortantes y fuerza de arrastre.

13.3 Espesor de la capa límite

Dentro del propósito de cuantificar el estudio de la capa límite conviene precisar mejor qué espesor ha de asignársele realmente a esta zona de efectos viscosos apreciables. No existe unanimidad al respecto puesto que en el fluido real no hay una *delimitación* clara entre la zona donde el fluido está siendo frenado por la presencia de la pared y la zona más lejana, donde esta influencia no llega.

Una *primera definición* consiste en decir que δ es aquella distancia de la pared en la cual la velocidad u ha alcanzado el 99% del valor U_0 que tiene el fluido en la zona no afectada por la viscosidad

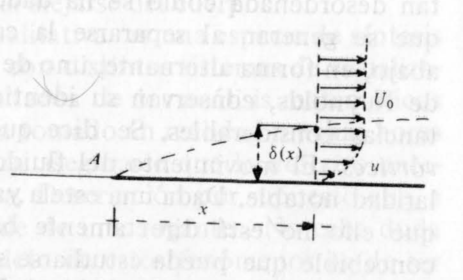


Figura 13.7.

Una primera constatación con ésta, o con cualquier otra de las definiciones, es que el espesor δ varía con la distancia x al "borde de ataque" A donde empezó la capa. Es decir que, con las notaciones de la figura,

$$\delta = \delta(x) \tag{13-1}$$

Se han sugerido, y se utilizan, otras definiciones del espesor. Una de ellas surge de observar que, debido a la menor velocidad en la capa límite, por ella circula menor caudal del que hubiese pasado por esa zona de no existir pared ni capa límite. Esa pérdida de caudal es dada por

$$\int_0^\infty (U_0 - u)\, dy$$

donde el límite superior de la integral se pone infinito en el supuesto que el empate entre la distribución variable en la capa y fuera de ella es de tipo asintótico.

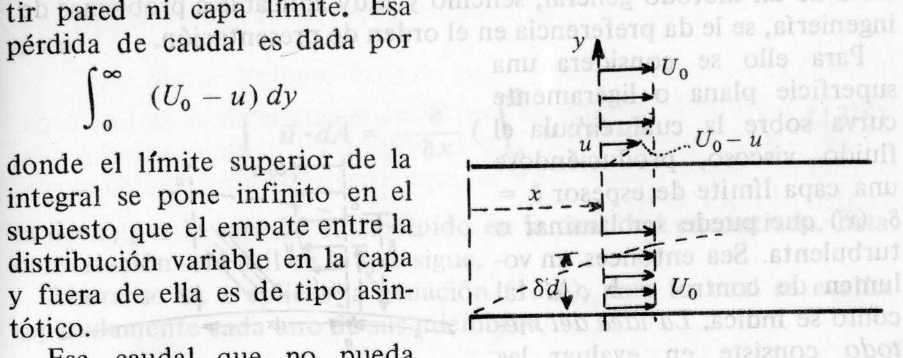


Figura 13.8.

Ese caudal que no pueda pasar por cerca de la pared hace "apartar" de ellas las líneas de corriente, esto es, las desplaza hacia afuera. El espesor δ_d se define entonces como una medida de ese *desplazamiento,* y se tiene

$$\delta_d = \frac{1}{U_0} \int_0^\infty (U_0 - u)\, dy \tag{13-2}$$

Otra definición de δ consiste en definirla como una medida de la pérdida de *cantidad de movimiento* debido al "defecto" de la velocidad $U_0 - u$ en la capa límite.

$$\delta_m = \frac{1}{U_0^2} \int_0^\infty (U_0 - u)\, u\, dy \tag{13-3}$$

Como se ve estas definiciones, no todas coincidentes, son más bien convencionales y se adopta una y otra según sea conveniente. En todo caso, el espesor δ es una cantidad comparada al tamaño de la lámina, o a la abscisa x[2].

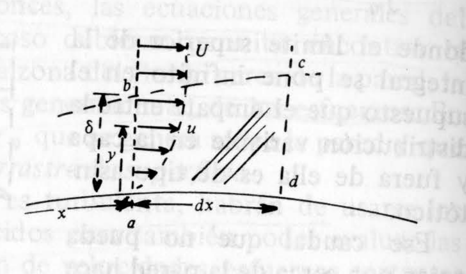
[2] Sobre teoría de capa de límite se puede recomendar, muy especialmente, el amplio texto de H. Schlichting, *Grenzschichttheorie,* Springer-Verlag, traduci o al castellano según H. Schlichiting, Teoría de la capa Límite, Urmo.

13.4 Método de von Kárman

El propósito de este método es encontrar la manera de determinar, en el flujo de un fluido viscoso, un valor *aproximado* del *esfuerzo cortante* que éste genera sobre una superficie, y por ende el valor de la fuerza de arrastre, a partir de una distribución de velocidades conocida aproximadamente dentro de la *capa límite.*

Este método fué desarrollado posteriormente a los trabajos de Prandtl y es útil tanto si la capa límite es *laminar* como si es *turbulenta*[3]. Desde un punto de vista estrictamente lógico, su estudio debiera venir después de la teoría de Prandtl. Sin embargo, debido a que se trata de un método general, sencillo y muy aplicable a problemas de ingeniería, se le da preferencia en el orden de presentación.

Para ello se considera una superficie plana o ligeramente curva sobre la cual circula el fluido viscoso, produciéndose una capa límite de espesor $\delta = \delta(x)$ que puede ser laminar o turbulenta. Sea entonces un volumen de control $a\ b\ c\ d$ tal como se indica. *La idea del método* consiste en evaluar las fuerzas que actúan sobre el volumen de control mencionado, en la dirección x, aplicando la ley de la cantidad de movimiento.



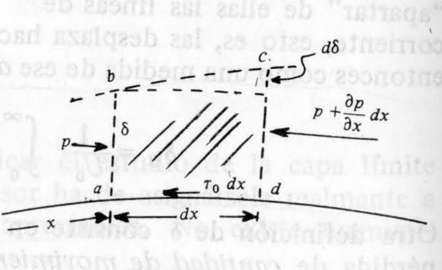


Figura 13.9.

En efecto, se puede escribir, suponiendo el flujo permanente

$$F_x = \int_{(A)} u_x\ \rho\bar{u}\cdot d\bar{A}, \qquad (13.4)$$

donde A es la superficie de control $a\ b\ c\ d$.

Para calcular esta fuerza conviene primero aplicar la *ecuación de continuidad* al volumen de control escogido.

Para ello se puede evaluar el caudal que atraviesa ab

$$\dot{V} = \int_0^\delta u\ dy, \qquad (13\text{-}5)$$

[3] Th. v. Kármán, Uber laminare und turbulente Reibung, ZAMM, Bd. 1 (1923), pág. 233.

Luego el caudal a través de cd se puede escribir como

$$\dot{V} + \frac{\partial \dot{V}}{\partial x}\ dx$$

y el caudal sobre la cara bc, de acuerdo con la ecuación de continuidad (3-10), será

$$-\dot{V} + \dot{V} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta u\ dy\right) dx + \int_{bc} \bar{u}\cdot d\bar{A} = 0$$

o sea

$$\int_{bc} \bar{u}\cdot d\bar{A} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta u\ dy\right) dx \qquad (13\text{-}6)$$

es decir, por la cara bc entra fluido en la cantidad encontrada. Esta constatación será útil en lo que sigue.

Ahora se va a aplicar la ecuación (13.4), para lo cual se evalúa separadamente cada uno de sus miembros,

$$F_x = p\delta - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\ dx\right)(\delta + d\delta) + \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\ dx\right)d\delta - \tau_0\ dx, \qquad (13\text{-}7)$$

ya que la proyección de la cara bc sobre cd es $d\delta$ y que se puede tomar una presión media sobre bc. Simplificando y despreciando los términos infinitésimos de orden superior se tiene

$$F_x = -\delta\ \frac{\partial p}{\partial x}\ dx - \tau_0\ dx \qquad (13\text{-}8)$$

Por otra parte evaluaremos el flujo de la cantidad de movimiento P_x sobre ab

$$P_x = \int_0^\delta \rho u^2\ dy \qquad (13\text{-}9)$$

Luego el segundo miembro de (13-4) se escribe

$$\int_{(A)} \bar{u}\ \rho\bar{u}\cdot d\bar{A} = -P_x + P_x + \frac{\partial P_x}{\partial x}\ dx + U\int_{bc} \rho\bar{u}\cdot d\bar{A}$$

puesto que el fluido que entra por bc tiene la velocidad del flujo exterior, U. Simplificando y recordando (13.6), se tiene,

$$\int_{(A)} \overline{u}\rho\overline{u}\cdot d\overline{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u^2\, dy\right) dx - U\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u dy\right) dx. \quad (13\text{-}10)$$

Si se utiliza esta expresión y la (13.8) en la ecuación (13.4), se obtiene, cambiando el signo y agrupando

$$\delta\frac{\partial p}{\partial x} + \tau_0 = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho\,(U - u)\,u\,dy. \quad (13\text{-}11)$$

Esta es la *fórmula integral de von Kármán* para el flujo en una capa límite. En el supuesto caso que la presión en el flujo exterior sea constante, como ocurre para la capa límite de una lámina plana paralela al flujo, se tiene

$$\tau_0 = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \rho\, u\,(U - u)\, dy$$

$$= \rho U^2\frac{\partial}{\partial x}\,\delta\int_0^1\left(1 - \frac{u}{U}\right)\frac{u}{U}\, d\frac{y}{\delta}\ , \quad (13\text{-}12)$$

poniendo esta última en forma adimensional.

Esta ecuación, como se ve, permite calcular el esfuerzo cortante τ_0 en la pared, siempre que se conozca el valor de δ, o sea el espesor de la capa límite y u/U como función de y/δ y de x, esto es, el perfil de velocidades.

El paso importante para llevar a cabo la integración de la ecuación (13.12) lo hizo también Prandtl al presentar la hipótesis de que los *perfiles de velocidad en la capa límite son geométricamente semejantes,* esto es, postuló que

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (13\text{-}13)$$

y que no es función de la abscisa x. Si además se da esta función por conocida, se puede calcular la integral

$$\alpha = \int_0^1\left(1 - \frac{u}{U}\right)\frac{u}{U}\, d\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (13\text{-}14)$$

que resulta tener un valor numérico perfectamente determinado.

La ecuación (13.12) se escribe entonces

$$\tau_0 = \rho U^2\ \alpha\ \frac{d\delta}{dx}\ , \quad (13\text{-}15)$$

con lo cual se obtiene una ecuación que liga a dos funciones todavía desconocidas, a saber $\delta = \delta\,(x)$ y $\tau_0 = \tau_0\,(x)$.

Ahora bien, hasta aquí todo lo dicho es valedero ya sea la capa límite laminar o turbulenta, como se hizo notar anteriormente.

Es preciso ahora, para seguir adelante, suponer o lo uno o lo otro. Se considerará primero el caso laminar.

a) Capa límite laminar. En este caso, y suponiendo que la función

$$\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (13\text{-}16)$$

haya sido dada, el esfuerzo cortante en la pared se calcula fácilmente,

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0} = \mu\frac{U}{\delta}\left[\frac{d\,u/U}{d\,y/\delta}\right]_{y=0} \quad (13\text{-}17)$$

Si se llama β esta derivada, conocida

$$\beta = \left[\frac{d\,u/U}{d\,y/\delta}\right]_{y=0}, \quad (13\text{-}18)$$

se tiene

$$\tau_0 = \mu\,\frac{U}{\delta}\,\beta, \quad (13\text{-}19)$$

y por consiguiente (13-15) se transforma en una ecuación diferencial para δ

$$\mu\,\frac{U}{\delta}\,\beta = \rho\,U^2\ \alpha\ \frac{d\delta}{dx}\ , \quad (13\text{-}20)$$

o sea

$$\delta\, d\delta = \frac{\mu}{\rho U}\ \frac{\beta}{\alpha}\ dx, \quad (13\text{-}21)$$

de donde integrando y tomando en cuenta la condición

$$\delta_{(0)} = 0$$

se tiene

$$\delta = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \qquad (13\text{-}22)$$

De ahí se ve que el contorno de la capa límite es una parábola. También se puede escribir

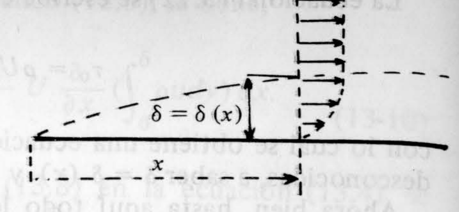


Figura 13.10.

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_{ex}}}, \qquad (13\text{-}22)$$

donde $R_{ex} = Ux/\nu$ es el llamado número de Reynolds local.

Hecho esto se puede determinar el esfuerzo cortante según (13.19)

$$\tau_0 = \mu \frac{U}{\delta} \beta = \frac{\mu U\beta}{\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha} \frac{\mu x}{\rho U}}}$$

$$= \frac{1}{2} \rho U^2 \sqrt{2\alpha\beta} \cdot \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{1}{2} \rho U^2 \frac{\sqrt{2\alpha\beta}}{\sqrt{R_{ex}}} \qquad (13\text{-}23)$$

Así pues, se han podido expresar las funciones $\delta = \delta(x)$ y $\tau = \tau(x)$ en la capa límite laminar sin realmente especificar el tipo de distribución de velocidades, la cual sólo interviene en los valores de α y β.

Asimismo, y siempre en términos de α y β, se puede determinar la *fuerza de arrastre* o *resistencia de superficie* producida en la cara de una lámina *finita* de longitud l.

En efecto, la fuerza de arrastre F_D sobre una cara es

$$F_D = b \int_0^l \tau_0 \, dx, \qquad (13\text{-}24)$$

donde b es el ancho de la lámina, y por consiguiente

$$F_D = \frac{1}{2} b \rho U^2 \sqrt{2\alpha\beta} \sqrt{\frac{\nu}{U}} \int_0^l x^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \rho U^2 bl \sqrt{2\alpha\beta} \frac{2}{\sqrt{R_{el}}}$$

donde

$$R_{el} = Ul/\nu \qquad (13\text{-}25)$$

Si se introduce el "coeficiente de arrastre" como la razón entre la fuerza de arrastre por unidad de área $(A = bl)$ y la presión de estancamiento como magnitud de referencia $\frac{1}{2} \rho U^2$, se tiene

$$C_D = \frac{\frac{F_D}{A}}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{2\sqrt{2\alpha\beta}}{\sqrt{R_{el}}}. \qquad (13\text{-}26)$$

Este coeficiente constituye una medida cómoda, (adimensional), de la fuerza de arrastre que actúa sobre una lámina delgada y plana cuando es colocada paralelamente a la velocidad de un flujo uniforme, y cuando en la capa límite el flujo es laminar.

Vemos que C_D depende exclusivamente de la distribución de velocidades y del número de Reynolds (13.26). Un valor aproximado de F_D y de C_D se obtiene cuando se toma una *distribución* ya sea medida experimentalmente ya sea supuesta, *de la velocidad.*

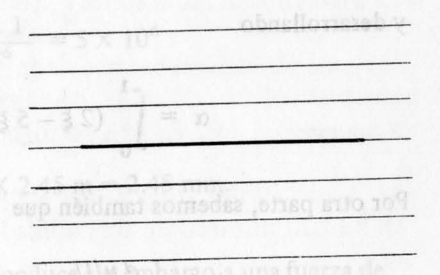


Figura 13.11.

Ejemplo:

Si en la capa límite de una lámina plana paralela al flujo, la distribución de velocidades es dada por la fórmula

$$\frac{u}{U} = 2 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

1. Determine la ecuación del crecimiento de la capa límite laminar a lo largo de dicha lámina plana, por el método integral de von Kármán.
2. Determine asimismo, el valor de la fuerza de arrastre y el coeficiente de arrastre, supuestos conocidos U_0, l, b, ρ, ν.

Figura 13.12.

3. Si se da $U_0 = 5$ m/seg, $l = 1$ m, $b = 0.5$ m, $\rho = 1000$ kg/m³, $\nu = 10^{-6}$ m³/seg, calcúlese el espesor máximo δ_M de la capa límite.

Solución

1. Conocida la distribución de velocidades se pueden calcular los coeficientes α y β.

Según se ha visto

$$\alpha = \int_0^1 (1 - \frac{u}{U}) \frac{u}{U} \, d\frac{y}{\delta}$$

de donde, introduciendo el cambio de variable,

$$\xi = \frac{y}{\delta}$$

y desarrollando

$$\alpha = \int_0^1 (2\xi - 5\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4)\, d\xi = \frac{2}{15}$$

Por otra parte, sabemos también que

$$\beta = [\frac{d\,u/U}{d\,y/\delta}]_{y=0} = [2 - 2\frac{y}{\delta}]_{y=0} = 2.$$

Luego la expresión del espesor de la capa límite, dada por (13.22), es, en el presente caso

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{2\mu\beta}{\rho U_0 \alpha}}\, x = \sqrt{\frac{30\mu}{\rho U_0}}\, x = \frac{5.48\, x}{\sqrt{R_{ex}}}$$

con

$$R_{ex} = U_0 x / \nu.$$

2. La resistencia de superficie o fuerza de arrastre F_D será dada, tomando en cuenta las dos caras, por

$$F_D = \frac{1}{2} \rho U_0^2 bl \sqrt{2\alpha\beta} \frac{2}{\sqrt{R_{el}}} \times 2$$

$$= \rho U_0^2 bl \frac{1.46}{\sqrt{R_{el}}}$$

con

$$R_{el} = \frac{U_0 l}{\nu}$$

El coeficiente de arrastre será entonces

$$C_D = \frac{2.92}{\sqrt{R_{el}}}$$

3. El espesor máximo de la capa límite se produce para $x = l$. Luego,

$$\delta_M = \frac{5.48\, l}{\sqrt{R_{el}}},$$

donde, con los datos

$$R_{el} = \frac{U_0 l}{\nu} = \frac{5 \times 1}{10^{-6}} = 5 \times 10^6$$

y por consiguiente,

$$\delta_M = \frac{5{,}48 \times 1}{\sqrt{5 \times 10^6}} = 10^{-3} \times 2.45 \text{ m} = 2.45 \text{ mm}.$$

Es de notar que este espesor tan pequeño conduce sin embargo a una fuerza de arrastre de

$$F_D = \frac{1}{2}\, 1000 \times 5^2 \times 0{,}5 \times 1 \times \frac{1.46}{\sqrt{5 \times 10^6}} \times 2$$

$$= 8.15 \text{ N}.$$

Este fenómeno del arrastre de los objetos por el fluido en movimiento es el que resulta inexplicable si se desprecia la viscosidad, y por consiguiente, esa finísima capa límite.

Ejercicios

1. Si en la capa límite laminar que se forma a cada lado de una placa de longitud L y ancho b colocada paralelamente a un flujo originalmente uniforme, se supone una distribución de velocidades dada por

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} (\frac{y}{\delta})^3$$

determínese el espesor $\delta = \delta(x)$ de dicha capa límite, el valor del esfuerzo cortante τ_0 en cada punto de la placa y la fuerza de arrastre que se produce sobre cada una de las caras. Es este el caso cuyos resultados mejor se acercan a los resultados experimentales.

Respuesta: $\delta = 4.65\, x/\sqrt{R_{ex}}$, $\tau_0 = 0.322\sqrt{\mu\rho U^3/x}$, $F_D = 0.644\sqrt{\mu\rho U^3 L}$

2. La misma pregunta que en el ejercicio anterior, pero suponiendo esta vez una distribución de velocidad en la capa límite dada por

$$\frac{u}{U} = \text{sen}\ \frac{\pi y}{2\delta}$$

Respuesta: $\delta = 4.796\sqrt{\nu x/U}$, $\tau_0 = 0.327\sqrt{\mu\,\rho\, U^3/x}$

3. Calcular τ_0 en un punto de una placa plana, paralela al flujo, debido a una capa límite laminar, cuando se admite la distribución de velocidades ya considerada

$$\frac{u}{U_0} = 2\,\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

Respuesta: $\tau_0 = 0.365\sqrt{\mu\,\rho U^2/x}$

b) Capa límite turbulenta. La estabilidad de la capa límite se estudia en base al número de Reynolds local, (13.22),

$$R_{ex} = \frac{U_0\, x}{\nu}$$

y los resultados experimentales, efectuados sobre láminas con *superficie lisa,* indican que hasta $R_{ex} = 5 \times 10^5$ aproximadamente, la capa límite es laminar, mientras que para valores mayores se hace turbulenta. Esta turbulencia puede además producirse para valores menores que el anterior si aparece alguna irregularidad en la superficie de la lámina.

Si pues la capa límite es turbulenta, el flujo sólo se puede estudiar en forma aproximada, esto es según el método planteado por von Kármán que estamos considerando.

Para ello es necesario escoger la ley de distribución de las velocidades, la cual ha de permitir el cálculo de α, de acuerdo con (13.14). Tenemos, para escoger, dos leyes principales de distribución de velocidades en flujo turbulento. La primera, empírica fué dada para tuberías, en (10.35)

$$\frac{u}{U_0} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^n \qquad (13\text{-}27)$$

y la segunda, resultado de la teoría de la longitud de mezcla, esto es, con cierta base deductiva, en (10-40)

$$\frac{u}{u^*} = 2{,}5\ ln\ \frac{y}{\epsilon} + 8{,}5. \qquad (13\text{-}28)$$

Debido a que aparece la función logaritmo, esta ley es más difícil o más incómoda de manejar que la anterior. Se escogerá pues la primera, cuya precisión es ampliamente suficiente en el problema actual.

La ecuación (13.27) es equivalente a

$$\frac{u}{u^*} = A\ \left(\frac{y\, u^*}{\nu}\right)^n, \qquad (13.29)$$

donde A y n son coeficientes que se determinan experimentalmente y que se tomarán, en este estudio, $A = 8.7$ y $n = 1/7$.

La demostración de esa equivalencia ha sido ya propuesta en forma de ejercicio en la sección (10.4). Vamos a darla aquí para que la presente exposición resulte completa.

Se trata simplemente de mostrar que se puede pasar de una relación a la otra y viceversa. Recordando que U_0 es la velocidad máxima, obtenida cuando $r = r_0$, se deduce de (13.29)

$$\frac{U_0}{u^*} = A\ \frac{r_0^n\ u^{*\,n}}{\nu^n}, \qquad (13\text{-}30)$$

de donde

$$U_0 = A\ \frac{r_0^n\ u^{*\,n+1}}{\nu^n}.$$

Sustituyendo este valor en (13.27), se obtiene

$$\frac{u}{U_0} = \frac{u\,\nu^n}{A\ r_0^n\ u^{*\,n+1}} = \frac{y^n}{r_0^n},$$

esto es, la (13.29):

$$\frac{u}{u^*} = A\ \frac{y^n\ u^{*\,n}}{\nu^n}.$$

La recíproca es evidentemente cierta también.

Si aceptamos pues la ley de distribución (13.27) o su equivalente (13.29), podremos calcular el coeficiente α, (13.14), y el esfuerzo cortante en la pared τ_0.

Para ello es necesario adoptar el criterio, repetidas veces comprobado experimentalmente, según el cual las *mismas leyes* relacionan el

flujo turbulento en una tubería de radio r_0 y el flujo turbulento sobre un plano, con un espesor δ. Se podrá pues sustituir r_0 por δ y tendremos, para el cálculo de α,

$$\frac{u}{U_0} = (\frac{y}{\delta})^n,$$

y por consiguiente

$$\alpha = \int_0^1 [1 - (\frac{y}{\delta})^n] (\frac{y}{\delta})^n d\frac{y}{\delta} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \qquad (13\text{-}31)$$

El cálculo de τ_0 se hará a partir de (13.30), de donde se despeja

$$u^{*n+1} = \frac{U_0}{A}\frac{\nu^n}{r_0^n} = \frac{U_0^{n+1}}{A}\frac{\nu^n}{U_0^n r_0^n},$$

y por consiguiente

$$u^* = \frac{U_0}{A^{\frac{1}{n+1}}} (\frac{\nu}{U_0 r_0})^{\frac{n}{n+1}}$$

Recordando la definición de τ_0, (10.23), se obtiene

$$\tau_0 = \rho u^{*2} = \frac{1}{A^{\frac{2}{n+1}}} \rho U_0^2 (\frac{\nu}{U_0 r_0})^{\frac{2n}{n+1}}$$

Para el estudio de la capa límite, sustituimos de nuevo r_0 por δ, obteniendo

$$\tau_0 = A^{-\frac{2}{n+1}} \rho U_0^2 (\frac{\nu}{U_0 \delta})^{\frac{2n}{n+1}} \qquad (13\text{-}32)$$

El valor de τ_0 puede sustituirse ahora en (13.15) obteniéndose la ecuación diferencial,

$$A^{-\frac{2}{n+1}} \rho U_0^2 (\frac{U_0 \delta}{\nu})^{-\frac{2n}{n+1}} = \rho U_0^2 \alpha \frac{d\delta}{dx}$$

donde α es un valor numérico dado por (13.31). Esta ecuación se escribe

$$\delta^{\frac{2n}{n+1}} d\delta = A^{-\frac{2}{n+1}} (\frac{U_0}{\nu})^{-\frac{2n}{n+1}} \frac{1}{\alpha} dx$$

Para integrar, convengamos en las siguientes condiciones iniciales: para $x = x_0$, $\delta = \delta_0$. Entonces

$$\delta^{\frac{3n+1}{n+1}} = \delta_0^{\frac{3n+1}{n+1}} + \frac{3n+1}{n+1} \frac{(\frac{U_0}{\nu})^{-\frac{2n}{n+1}} (x - x_0)}{\alpha A^{\frac{2}{n+1}}}$$

Figura 13.13.

Esta ecuación da el espesor de la capa límite en función de x.

Si adoptamos los valores antes mencionados $A = 8.7$ y $n = 1/7$, (válidos para $R_e \leqslant 10^7$) obtenemos

$$\delta^{5/4} = \delta_0^{5/4} + 0.0284 \frac{x - x_0}{\alpha} (\frac{\nu}{U_0})^{1/4} \qquad (13\text{-}33)$$

Finalmente, en el caso particular en que la capa límite es turbulenta desde la propia arista de ataque de la lámina, $x_0 = 0$, $\delta_0 = 0$, se tiene

$$\delta = 0.0585 (\frac{\nu}{U_0})^{1/5} (\frac{x}{\alpha})^{4/5} = 0.378\, x\, R_e^{-1/5} \qquad (13\text{-}34)$$

con $\alpha = 7/72 = 0.0972$.

La determinación del esfuerzo cortante se lleva a cabo ahora mediante la relación (13.15), esto es

$$\tau_0 = \alpha \rho U_0^2 \frac{d\delta}{dx} = \alpha \rho U_0^2 \frac{4}{5} \times 0.0585 \times (\frac{\nu}{U_0})^{1/5} (\frac{x}{\alpha})^{-1/5} \frac{1}{\alpha}$$

$$= 0.0468 \rho U_0^2 (\frac{\alpha}{R_{ex}})^{1/5}, = 0.0294 \rho U_0^2 R_{ex}^{-1/5} \qquad (13\text{-}35)$$

siendo

$$R_{ex} = \frac{U_0 x}{\nu}$$

Estos resultados permiten calcular la fuerza de arrastre

$$F_D = \int_0^l \tau_0 b\, dx = 0.0468 \rho U_0^2 \int_0^l (\frac{\alpha \nu}{U_0})^{1/5} x^{-1/5} dx$$

$$= 0.0585 \rho U_0^2 bl (\frac{\alpha}{R_{el}})^{1/5} = 0.0367 \rho U_0^2 bl R_{el}^{-1/5} \qquad (13\text{-}36)$$

siendo b, como antes, el ancho de la lámina.

El coeficiente de arrastre es pues

$$C_D = \frac{F_D/bl}{\frac{1}{2}\rho\, U_0^2} = 0.117 \ (\frac{\alpha}{R_{el}})^{1/5}$$

$$= 0.0734\ (R_{el})^{-1/5} \tag{13-37}$$

Los resultados experimentales correspondientes a este problema dan el valor

$$C_D = 0.074\ (R_{el})^{-1/5} \tag{13-38}$$

lo cual sirve de comprobación muy satisfactoria de todas las hipótesis hechas en esta teoría.

Observaciones

Conviene subrayar que este estudio de la capa límite turbulenta es sólo aplicable cuando se cumplen las siguientes condiciones:

a) El número de Reynolds está comprendido entre

$$5 \times 10^5 < R_e < 10^7$$

El límite inferior proviene de que para $R_e < 5 \times 10^5$ la capa límite es usualmente laminar. El límite superior es debido a que para valores mayores de R_e, el valor de n ya no es 1/7, como se ha supuesto, sino menor. H. Schlichting ha obtenido, para $R_e > 10^7$ la fórmula semi empírica

$$C_D = 0.455\ (\log_{10} R_e)^{-2.58}$$

b) La capa límite es totalmente turbulenta. Puede ocurrir, sin embargo, que la capa límite sea laminar en el borde de ataque, en una porción no despreciable de la lámina, y turbulenta después. Este problema se dejará como ejercicio.[4]

c) La lámina es lisa. Si la superficie fuese rugosa, podemos esperar, por analogía con el caso de las tuberías, un aumento de C_D.

Para terminar con este problema, se dará, en forma gráfica, la variación de C_D en función de R_e, para una lámina lisa.

[4] Ver también, B.S. Massey, *Mechanics of Fluids;* Van Nostrand. H. Schlichting Teoría de la Capa límite, Urmo.

Ejercicios

1. Se da una lámina delgada de longitud $L = 1$ m, ancho $b = 0.5$ m colocada en un flujo inicialmente uniforme $U_0 = 50$ m/seg. Se pide el espesor de la capa límite, dado que es turbulenta sobre toda su extensión, el esfuerzo cortante en función de la obscisa y la fuerza de arrastre correspondientes. Datos: $\rho = 1.21$ Kg/m^3, $\nu = 14 \times 10^{-5}$ m^2/seg.

Respuesta: [$= 1.847 \times 10^{-2}\ x^{4/5}$ m.; $\tau_0 = 4.35\ x^{-1/5}$ N/m^2; 2.715 N.

2. Una lámina plana y lisa de 2.4 m de largo por 90 cm de ancho se mueve longitudinalmente con una velocidad de 6 m/seg. en aire en reposo de densidad 1.21 Kg/m^3 y una viscosidad cinemática de 1.4×10^{-5} m^2/seg. Suponiendo que la capa límite es enteramente laminar, calcúlese su espesor en el borde aguas abajo de la lámina y la potencia necesaria para mantener el movimiento de la lámina. ¿Qué potencia se necesitaría si la capa límite fuese totalmente turbulenta en vez?

Respuesta: 1.17 mm, 0.675 W; 13.08 W.

13.5 Teoría de la capa límite según Prandtl

Como se dijo al introducir este capítulo, la existencia y la importancia de la capa límite como capa en la cual la viscosidad juega un papel fundamental fué puesta de manifiesto por Prandtl, en 1904. El mostró cómo se podían plantear y resolver las ecuaciones "exactas" de la capa límite, a partir de las ecuaciones de Navier Stokes. Aquí se resumirá su trabajo en forma sencilla.

La idea fundamental introducida por Prandtl se basa en que

$$\delta \ll x, \tag{13-50}$$

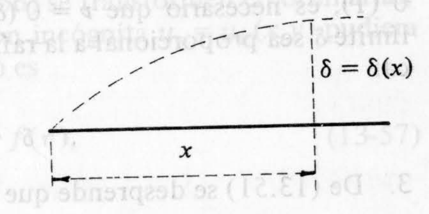


Figura 13.14.

y consiste en afirmar que debido a ello, ciertos términos en las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo plano son despreciables frente a los demás.

Considérese en efecto el caso de un flujo bidimensional permanente, caracterizado por

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) \tag{13-51}$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)$$

Se admite como consecuencia de (13.50), que también

$u_y \ll u_x$; esto es que

y que $x = 0\,(1)$, $\quad y = 0\,(\delta)$

$u_x = 0\,(1)$, $\quad u_y = 0\,(\delta)$

donde la rotación $y = 0\,(\delta)$ quiere decir y del orden de δ.

Entonces, esquemáticamente, los órdenes de magnitud de los términos de las ecuaciones (13.51) se pueden indicar como sigue

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right), \qquad (13\text{-}52)$$

$$1 \quad 1 \quad \delta \quad 1/\delta \qquad\qquad 1 \quad 1/\delta^2$$

$$u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) \qquad (13\text{-}53)$$

$$1 \quad \delta \quad \delta \quad 1 \qquad\qquad \delta^2 \quad \delta \quad 1/\delta$$

Las siguientes conclusiones se imponen:

1. El término $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}$, y, por consiguiente, se puede despreciar $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$ en las ecuaciones de la capa límite.

2. Para que los términos de (13.52) sean todos del mismo orden, 0 (1), es necesario que $\nu = 0\,(\delta^2)$, es decir, que el espesor de la capa límite δ sea proporcional a la raíz cuadrada de la viscosidad cinemática:

$$\delta \sim \sqrt{\nu}$$

3. De (13.51) se desprende que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0\,(\delta),$$

y por consiguiente, que p puede ser considerada una función unicamente de x.

Debido a estas propiedades (13.52) se puede escribir

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \qquad (13\text{-}54)$$

Esta es la llamada *ecuación de la capa límite*, de Prandtl.

Cuando es completada por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \qquad (13\text{-}55)$$

permite la determinación del flujo en una capa límite bidimensional.

Flujo sobre una lámina plana (Blasius)

En el caso de una lámina plana, el gradiente de presión

$$\frac{dp}{dx} \approx 0$$

y por consiguiente, las ecuaciones de Prandtl de la capa límite se escriben

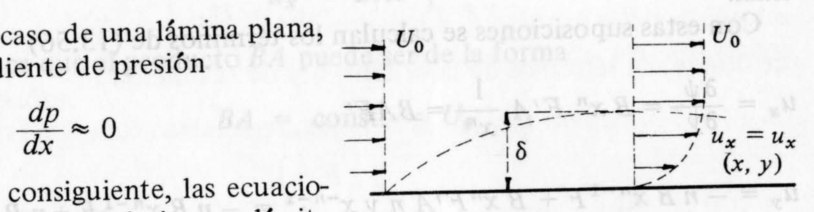


Figura 13.15.

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \qquad (13\text{-}56)$$

La solución de este problema fue dada en 1908 por Blasius. La idea de su método de solución consiste en hacer un cambio de variable tal que las ecuaciones diferenciales (13.56) se transformen en ordinarias.

Para ello, él razonó que la función incógnita $u_x = u_x(x,y)$ pudiera depender de una sola variable η, esto es

$$\frac{u_x}{U_0} = f(\eta), \qquad (13\text{-}57)$$

donde η a su vez fuera de la forma

$$\eta = A\,\frac{y}{x^n} \qquad (13\text{-}58)$$

siendo las constantes A y n dos parámetros por determinar, de manera que la expresión final fuese lo más lo más sencilla posible y que se cumpliese la condición (13.57).

Por otra parte, la ecuación de continuidad se satisface automáticamente introduciendo la función de corriente

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad (13\text{-}59)$$

Sobre dicha función $\psi = \psi(x, y)$ se puede decir ya algo, en base a que $\frac{u_x}{U_0}$ ha de ser unicamente función de η, (13.57).

En efecto, entonces ψ ha de ser de la forma

$$\psi = B\,x^n\,F(\eta), \tag{13-60}$$

donde F es una función unicamente de η, y está por determinar. La constante B se introduce para poder hacer más simple la expresión final.

Con estas suposiciones se calculan los términos de (13.56)

$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = B\,x^n\,F'A\,\frac{1}{x^n} = BAF'$$

$$u_y = -n\,B\,x^{n-1}F + B\,x^nF'A\,n\,y\,x^{-n-1} = -n\,B\,x^{n-1}F + n\,B\,F'\frac{Ay}{x}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = BA^2\,\frac{F''}{x^n}\,,\quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = -BAF''nAyx^{-n-1} = -\frac{nBA^2F''y}{x^{n+1}}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{BA^2}{x^n}\,F'''\,\frac{A}{x^n} = \frac{BA^3}{x^{2n}}\,F'''.$$

Llevando estas expresiones en (13.56), se obtiene, sucesivamente

$$-BAF'\frac{nBA^2F''y}{x^{n+1}} + [-nBx^{n-1}F + nBF'\frac{Ay}{x}]\,BA^2\,\frac{F''}{x^n} =$$

$$= \nu\frac{BA^3}{x^{2n}}\,F'''$$

$$-nB^2A^3F'F''\,\frac{y}{x^{n+1}} - nB^2A^2\,\frac{FF''}{x} + nB^2A^3F'F''\,\frac{y}{x^{n+1}} =$$

$$= \nu\frac{BA^3}{x^{2n}}\,F''' - n\,BFF'' = \nu\,\frac{AF'''}{x^{2n-1}}$$

Para que x desaparezca se hace $2n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1/2$, entonces se tiene

$$\eta = A\,\frac{y}{x^{1/2}} \tag{13-61}$$

$$\psi = B\,x^{1/2}\,F, \tag{13-62}$$

y la ecuación diferencial

$$BAFF'' + 2\,\nu A^2\,F''' = 0 \tag{13-63}$$

Para determinar A y B, asunto de menor trascendencia, comparado con (13.61), se puede razonar de la siguiente manera:

Primero se quiere que la función F y sus derivadas sean adimensionales. Entonces de la expresión de u_x

$$u_x = BAF',$$

se deduce que el producto BA puede ser de la forma

$$BA = \text{const.} = U_0$$

Luego

$$u_x = U_0\,F' \tag{13-64}$$

De (13.63) escrita como

$$FF'' + 2\,\frac{\nu}{U_0}\,A^2F''' = 0, \tag{13-65}$$

se ve que la ecuación diferencial tendrá una forma muy simple si

$$\frac{\nu}{U_0}\,A^2 = 1,$$

de donde

$$A = \sqrt{\frac{U_0}{\nu}}\,,\qquad B = \sqrt{\nu U_0}\quad ; \tag{13-66}$$

entonces, en efecto, la ecuación diferencial, llamada de Blasius, se escribe

$$FF'' + 2\,F''' = 0\,. \tag{13-67}$$

El cambio de variable (13.61) toma la forma final

$$\eta = y\,\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} = \sqrt{\frac{U_0}{\nu}}\quad y\,x^{-1/2}\,, \tag{13-68}$$

y la función de corriente es

$$\psi = \sqrt{\nu U_0 x}\quad F = \sqrt{\nu U_0}\quad x^{1/2}\;F \tag{13-69}$$

Condiciones de contorno. Las condiciones de contorno para este problema de capa límite son evidentemente que en la pared, las dos componentes de la velocidad sean nulas, y que u_x en dicha capa tienda asintóticamente a la velocidad del flujo potencial exterior cuando y crece. Esto es

$$y = 0 \qquad u_x = 0, \quad u_y = 0$$

$$y = \infty \qquad u_x = U_0 \tag{13-70}$$

de donde, en términos de la variable η y de la función F:

$$\eta = 0 \qquad F' = 0, \quad F = 0$$

$$\eta = \infty \qquad \frac{u}{U_0} = F' = 1 \tag{13-71}$$

El problema matemático ahora planteado para conocer la distribución de velocidades en la capa límite es:

$$FF'' + 2F''' = 0$$

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1 \tag{13-72}$$

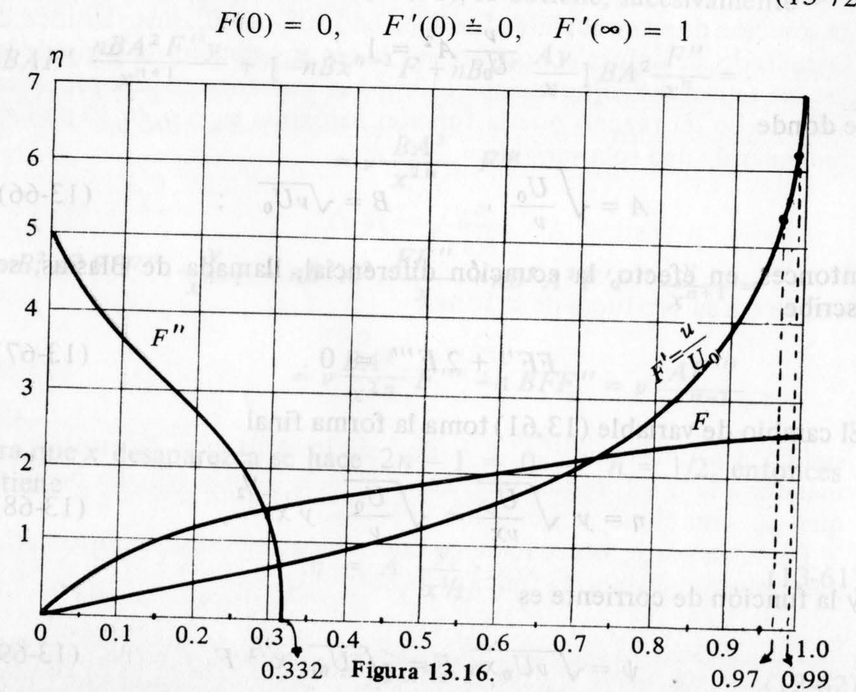


Figura 13.16.

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria *no lineal* de tercer orden. La solución de Blasius fue obtenida por desarrollo en series alrededor de $\eta = 0$ y $\eta = \infty$ empatando debidamente las funciones así obtenidas.

Los resultados de este cálculo se dan gráficamente en la Fig. 16 y numéricamente en la Tabla 13-1, con lo cual queda totalmente resuelto el problema.

Esfuerzo cortante en la pared. Conocida la función F y sus derivadas se puede obtener toda la información deseable de los resultados encontrados.

Así, el esfuerzo cortante en la pared se obtiene mediante

$$\tau_0 = \mu \left[\frac{\partial u_x}{\partial y}\right]_{y=0} = \mu BA^2 \left[\frac{F''}{x^{1/2}}\right]_{y=0} = \mu\, U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu}} \frac{1}{x^{1/2}} [F'']_{y=0}$$

$$= \mu \frac{U_0}{x} \sqrt{\frac{U_0 x}{\nu}} [F'']_{y=0} = 0.332 \sqrt{\frac{\rho\mu\, U_0^3}{x}} \tag{13-73}$$

En cuanto a la fuerza de arrastre, se obtiene como sigue

$$F_D = \int_0^l \tau_0\, b\, dx = 0.332\, b\mu U_0 [2 x^{1/2}] = 0.664\, bl\rho U_0^2 \sqrt{\frac{\nu}{U_0 l}}, \tag{13-74}$$

y, por consiguiente, el coeficiente de arrastre

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 bl} = \frac{1.328}{\sqrt{R_{el}}}. \tag{13-75}$$

TABLA 13.1.

FUNCION $F(\eta)$ PARA LA CAPA LIMITE EN UNA LAMINA PLANA CON INCIDENCIA NULA

$\eta = y\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$	$F(\eta)$	$F' = \frac{u}{U_0}$	F''
0	0	0	0.33206
0.2	0.00664	0.06641	0.33199
0.4	0.02656	0.13277	0.33147
0.6	0.05974	0.19894	0.33008
0.8	0.10611	0.26471	0.32739
1.0	0.16557	0.32979	0.32301
1.2	0.23795	0.39378	0.31659
1.4	0.32298	0.45627	0.30787
1.6	0.42032	0.51676	0.29667
1.8	0.52952	0.57477	0.28293
2.0	0.65003	0.62977	0.26675
2.2	0.78120	0.68132	0.24835
2.4	0.92230	0.72899	0.22809
2.6	1.07252	0.77246	0.20646
2.8	1.23099	0.81152	0.18401
3.0	1.39682	0.84605	0.16136
3.2	1.56911	0.87609	0.13913
3.4	1.74696	0.90177	0.11788
3.6	1.92954	0.92333	0.09809
3.8	2.11605	0.94112	0.08013
4.0	2.30576	0.95552	0.06424
4.2	2.49806	0.96696	0.05052
4.4	2.69238	0.97587	0.03897
4.6	2.88826	0.98269	0.02948
4.8	3.08534	0.98779	0.02187
5.0	3.28329	0.99155	0.01591
5.2	3.48189	0.99425	0.01134
5.4	3.68094	0.99616	0.00793
5.6	3.88031	0.99748	0.00543
5.8	4.07990	0.99838	0.00365
6.0	4.27964	0.99898	0.00240
6.2	4.47948	0.99937	0.00155
6.4	4.67938	0.99961	0.00098
6.6	4.87931	0.99977	0.00061
6.8	5.07928	0.99987	0.00037
7.0	5.27926	0.99992	0.00022

FUNCION (η) PARA LA CAPA LIMITE EN UNA LAMINA PLANA CON INCIDENCIA NULA

η	$F(\eta)$	F'	F''
7.2	5.47925	0.99996	0.00013
7.4	5.67924	0.99998	0.00007
7.6	5.87924	0.99999	0.00004
7.8	6.07923	1.00000	0.00002
8.0	6.27923	1.00000	0.00001
8.2	6.47923	1.00000	0.00001
8.4	6.67923	1.00000	0.00000
8.6	6.87923	1.00000	0.00000
8.8	7.07923	1.00000	0.00000

Fuente: L. Howarth, "On the solution of the laminar boundary layer equations", *Proc. Roy. Soc.*, Londres, A-164-547 (1938). Reproducido en H. Schlichting, *Boundary Layer Theory.* McGraw-Hill.

Ejercicios

1. En un flujo uniforme de aire a 20°C y 1 bar de presión con $U_0 = 2$ m/seg. se coloca una lámina delgada de longitud $L = 3$ m y de ancho $b = 1.50$m, paralelamente al movimiento.

a) Sabiendo que el flujo en la capa límite es laminar y definiendo su espesor como aquel en que la velocidad alcanza el 99% de la velocidad exterior, calcúlese según la teoría de Blasius, *en el extremo* aguas abajo de la lámina, el espesor de la capa límite el caudal en volumen de fluido que circula por dicha capa y el esfuerzo cortante en la pared.

b) Repetir los mismos cálculos haciendo uso del método de von Kárman, con un perfil de velocidades parabólico.

Respuestas: a) 2.48 cm., 48.5 lts/seg., $0.288 \times 10^{-2}\ \frac{N}{m^2}$

b) 2.77 cm., 55.4 lts/seg., $0.295 \times 10^{-2}\ \frac{N}{m^2}$

2. Comprobar que las magnitudes η, F, F', F''. introducidas en la solución de Blasius son adimensionales.

3. Cerca del punto de estancamiento de un cilindro colocado en un flujo anteriormente uniforme U_0, la velocidad exterior a la capa límite puede ser aproximada por la solución correspondiente a un flujo potencial.

$$U_1 = 2U_0 \text{ sen } \theta \cong \frac{2U_0 x}{R},$$

Por esta razón, la ecuación de la capa límite laminar cerca del punto de estancamiento puede escribirse aproximadamente

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 4 \frac{U_0^2}{R^2} x + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Encuéntrese una transformación del tipo

$$\eta = \frac{Ay}{x^n}, \qquad \psi = Bx^m F(\eta),$$

que reduzca la ecuación de la capa límite a

$$F''' + FF'' - F^2 + 1 = 0$$

Respuesta: $n = 0$, $m = 1$.

13.6. Resistencia de los cuerpos al avance

La resistencia que un fluido ejerce sobre un cuerpo que se desplaza en su seno, o recíprocamente la fuerza con que un fluido empuja un cuerpo fijo que se interpone en su movimiento, ha sido uno de los grandes problemas que se han planteado al hombre desde que éste empezó a construir artefactos e instrumentos de trabajo y de transporte.

A la luz de los capítulos anteriores, se comprende que es un fenómeno complicado el mecanismo mediante el cual se generan dichas fuerzas de resistencia.

Físicamente hablando, se pueden discernir con facilidad cuales son los factores que entran en juego: Las fuerzas netas que actúan sobre un cuerpo provienen de la *distribución de presiones* y de *esfuerzos cortantes* que actúan sobre la superficie del cuerpo.

En base a los distintos modelos que se han utilizado en el presente estudio (fluido ideal, capa límite, etc), es posible prever de una manera aproximada lo que habrán de ser esas presiones y esos esfuerzos cortantes. Pero, dado que la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes para ese tipo de problemas es imposible aun en cuerpos de forma sencilla, los resultados cuantitativos habrán de ser obtenidos experimentalmente. La naturaleza es en efecto la única que sabe integrar exactamente las ecuaciones aludidas.

Resistencia al avance en flujo bidimensional. Se puede empezar a razonar sobre el caso de un cilindro circular que se coloca en posición perpendicular al movimiento del fluido: así se harán más claros los argumentos a usar.

Lo primero que salta a la vista es que la viscosidad del fluido juega en este asunto un papel fundamental. En efecto, el escurrimiento de un fluido ideal alrededor de un cilindro fué descrito totalmente en el capítulo 5, donde se obtuvo la distribución de presiones tanto para un flujo inicialmente uniforme, como para un flujo con circulación. Se hizo notar entonces que si bien se podía obtener, con el modelo de un fluido ideal, una fuerza de sustentación, no se podía explicar en forma alguna la existencia de la fuerza de arrastre (paradoja de d' Alembert).

La existencia de la viscosidad modifica radicalmente la situación: por una parte la distribución de presiones es alterada, perdiéndose la simetría del bulbo representativo de dicha distribución, y como consecuencia, apareciendo una fuerza llamada *resistencia de forma,* por otra parte los esfuerzos cortantes generan sobre las paredes unas fuerzas de arrastre cuya resultante se ha dado en llamar *resistencia de superficie*

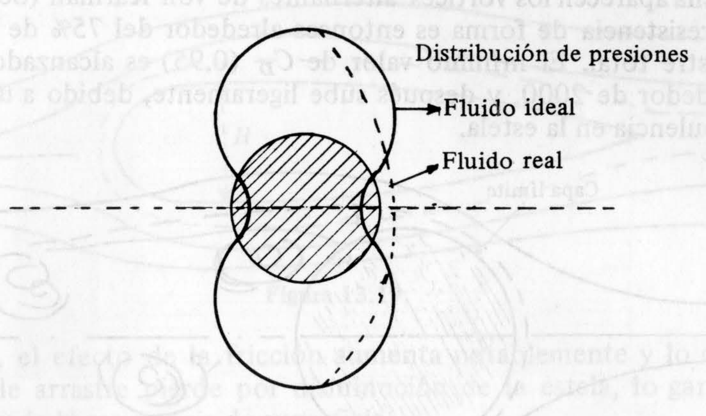


Figura 13.17.

Estas dos fuerzas componen la *fuerza de arrastre total*[5] F_D y su importancia relativa depende del número de Reynolds del escurrimiento.

Las razones de estas influencias se pueden entender físicamente en forma cualitativa. Los resultados experimentales finales se dan en forma gráfica, pero en este texto no se detallarán los métodos analíticos que se han utilizado con mayor o menor acierto en el estudio de los fenómenos considerados.

Volviendo al caso de un cilindro circular, se pueden entonces observar las siguientes situaciones:

[5] La fuerza de arrastre puede tener otras componentes: la llamada *resistencia de onda* que se produce sobre un cuerpo moviéndose en la superficie de un líquido o en el flujo supersónico de un fluido compresible.

a) *Cuando* $R_e < 0.5$. Se tiene un movimiento muy lento, (escurrimiento) en el cual las fuerzas de inercia son despreciables. La viscosidad actúa en el seno de todo el fluído, no hay estela aguas abajo del cuerpo y la resistencia es casi proporcional a la velocidad de acercamiento U, y las 2/3 partes de ella es debida a la resistencia de superficie. El caso corresponde a la parte recta de la curva[6]

$$C_D = f\,(R_e).$$

b) *Cuando* $0.5 < R_e < 200$. En esta zona ya los efectos de la viscosidad se han concentrado cerca de la pared, formándose por consiguiente una capa límite (laminar) que permanece pegada a la pared, con una separación muy atrás (Secc. 5-1 y Cap. 13) y una estela estrecha. La *resistencia de forma,* o sea la debida a una distribución disimétrica de las presiones va cobrando importancia.

c) *Cuando* $200 < R_e < 2.10^5$. La estela se agranda debido a que la capa límite (laminar) se separa cada vez más aguas arriba del cuerpo. En ella aparecen los vórtices alternantes de von Kármán (Secc. 13.1). La resistencia de forma es entonces alrededor del 75% de fuerza de arrastre total. El mínimo valor de C_D (0.95) es alcanzado para R_e alrededor de 2000, y después sube ligeramente, debido a una mayor turbulencia en la estela.

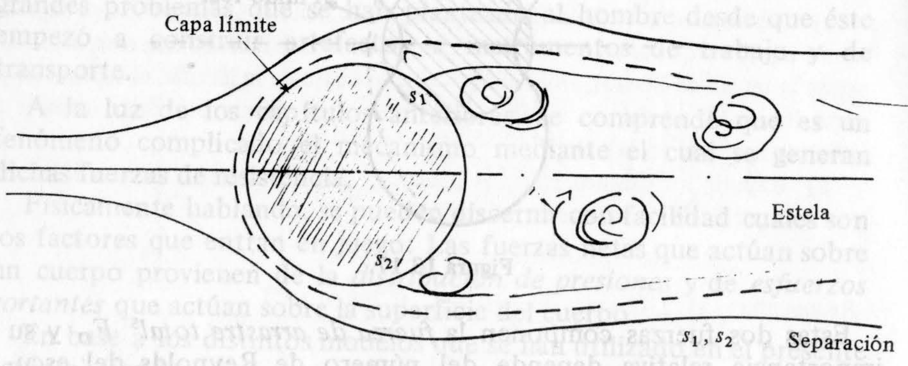


Figura 13.18.

Para valores de $R_e > 2000$, el punto de separación sigue avanzando aguas arriba, produciendo una mayor disimetría en el bulbo de presiones, la cual puede llegar a causar el 95% arrastre total.

d) Cuando R_e alcanza el valor de 2×10^5, aproximadamente, la *capa límite se hace turbulenta* antes de la separación: El gradiente de presiones es entonces menor aguas abajo y el punto de separación se mueve también aguas abajo. Al hacerse la estela más estrecha, la fuerza es también menor y hay un descenso *brusco* en el valor de C_D.

Esta caída de la resistencia puede producirse anteriormente al valor citado si el paso de régimen laminar a turbulento en la capa límite se produce artificialmente antes. De ahí derivan los métodos consistentes en aumentar la rugosidad de la pared. Cabe notar sin embargo que la resistencia de superficie es mayor en una capa límite turbulenta. Luego este régimen sólo será deseable en la capa, para disminuir C_D, cuando la forma del cuerpo sea tal que la estela disminuya considerablemente para la capa límite turbulenta.

Se ve que los criterios a seguir para disminuír F_D pueden resultar bastante complejos. Si se consideran cuerpos cilíndricos de *sección no circular,* convendrá evidentemente hacerlos "aerodinámicos" para que no se produzca separación de la capa límite y quede la estela reducida a un mínimo. Las limitaciones en este sentido provienen naturalmente, de que en un cuerpo de gran perímetro para un ancho

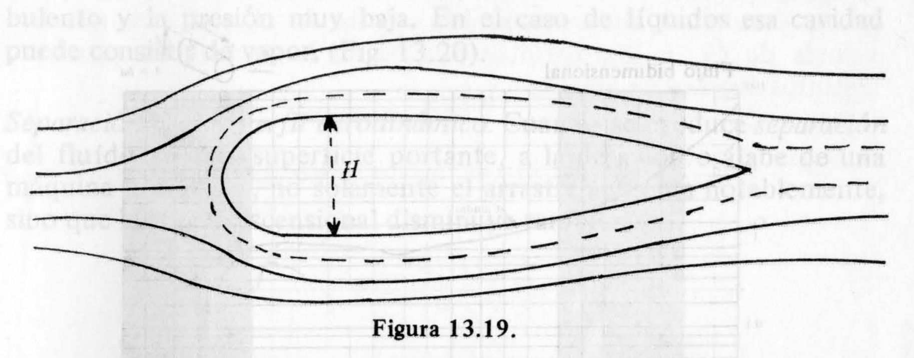


Figura 13.19.

H dado, el efecto de la fricción aumenta notablemente y lo que la fuerza de arrastre pierde por disminución de la estela, lo gana por aumento de la resistencia de superficie.

Resistencia al avance en cuerpos de tres dimensiones. En el caso de una esfera, la fuerza de arrastre para movimientos lentos ($R_e < 0.1$) fué determinanda analíticamente por Stokes integrando en forma aproximada las ecuaciones de Navier-Stokes. Esa solución fue mejorada posteriormente por Oseen.

Según Stokes, se tiene

$$C_D = \frac{24}{R_e}, \qquad \text{con } R_e < 0.1$$

y según Oseen,

$$C_D = \frac{24}{R_e}\left(1 + \frac{3}{16}R_e\right), \text{ con } R_e < 1.0.$$

[6] Recordemos que el coeficiente de arrastre C_D ha sido definido como, (13.26),

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 A}$$

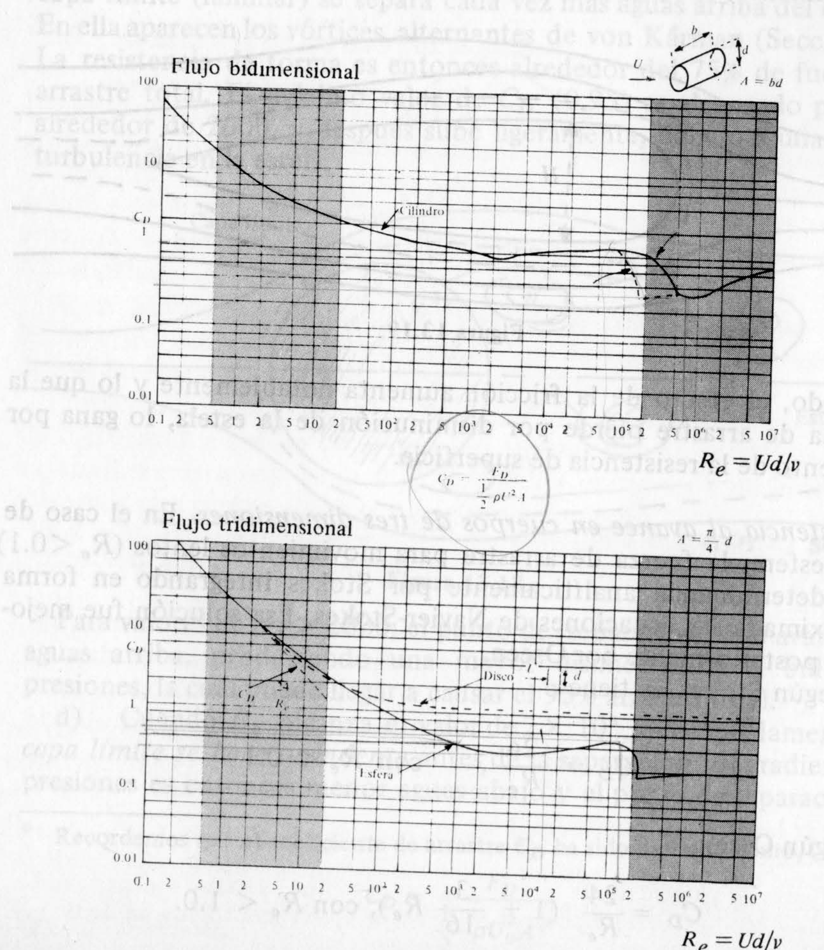
Para valores mayores es necesario recurrir a resultados experimentales y se encuentra la misma sucesión de fenómenos ya descrita para el caso bidimensional.

Una excepción es que, en tres dimensiones, no aparecen los vórtices de von Kárman.

Para otros cuerpos la descripción cualitativa sigue siendo la misma. Cabe señalar, sin embargo, la posibilidad de una separación brusca y bien definida, si el cuerpo tiene aristas vivas, como ocurre en el caso de un disco colocado de cara contra la corriente. Se produce entonces detrás del objeto una *cavidad* donde el fluido es altamente turbulento y la presión muy baja. En el caso de líquidos esa cavidad puede consistir de vapor. (Fig. 13.20).

Tabla 13.2.

COEFICIENTES DE ARRASTRE C_D EN FUNCION DEL NUMERO DE REYNOLDS R_e



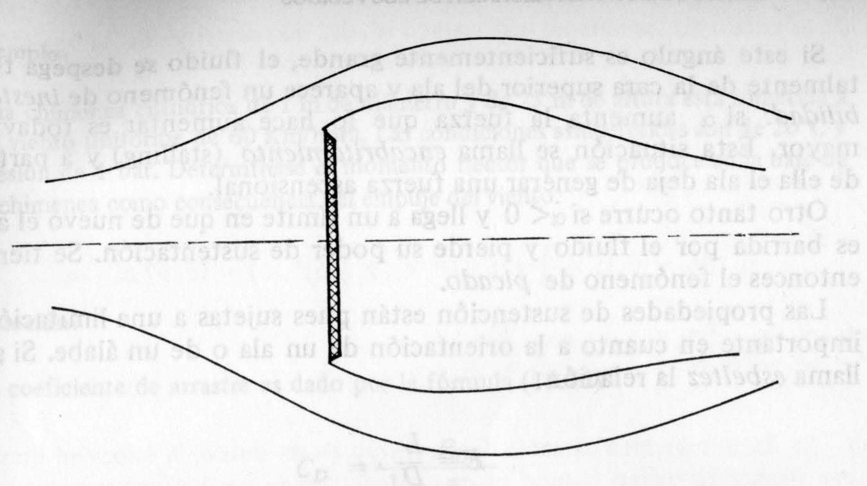
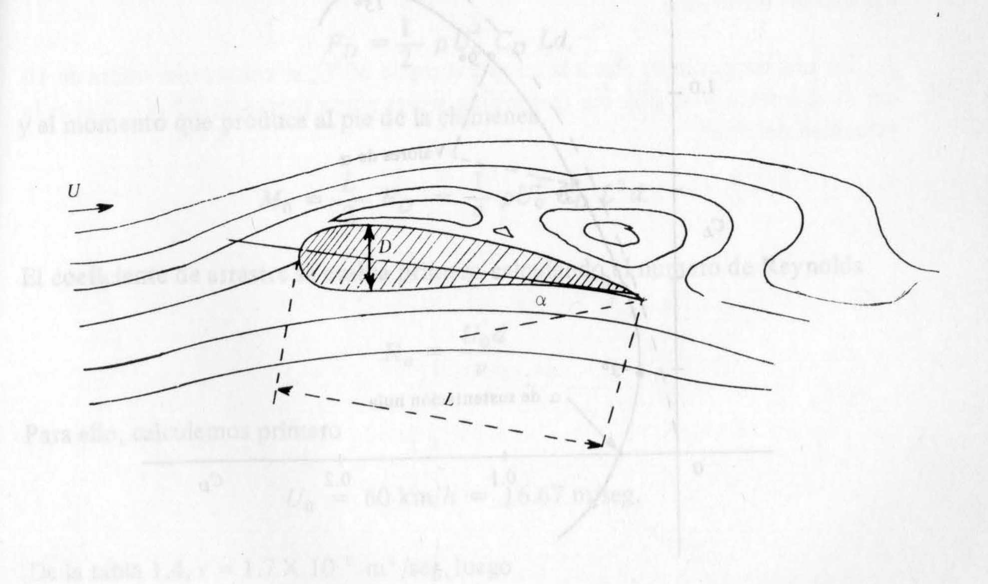


Figura 13.20.

Separación de un perfil aerodinámico. Cuando se produce *separación* del fluído en una superficie portante, a la de avión o álabe de una máquina hidráulica, no solamente el arrastre aumenta notablemente, sino que la fuerza ascensional disminuye también.



Si este ángulo es suficientemente grande, el fluido se despega totalmente de la cara superior del ala y aparece un fenómeno de *inestabilidad:* si α aumenta la fuerza que lo hace aumentar es todavía mayor. Esta situación se llama *encabritamiento* (stalling) y a partir de ella el ala deja de generar una fuerza ascensional.

Otro tanto ocurre si $\alpha < 0$ y llega a un límite en que de nuevo el ala es barrida por el fluido y pierde su poder de sustentación. Se tiene entonces el fenómeno de *picado.*

Las propiedades de sustención están pues sujetas a una limitación importante en cuanto a la orientación de un ala o de un álabe. Si se llama *esbeltez* la relación

$$E = \frac{L}{D},$$

las propiedades de un ala se acostumbran resumir en un *diagrama polar,* donde las abscisas son los valores de C_D las ordenadas los valores de C_L y los distintos puntos de la curva corresponden a distintos ángulos de ataque.

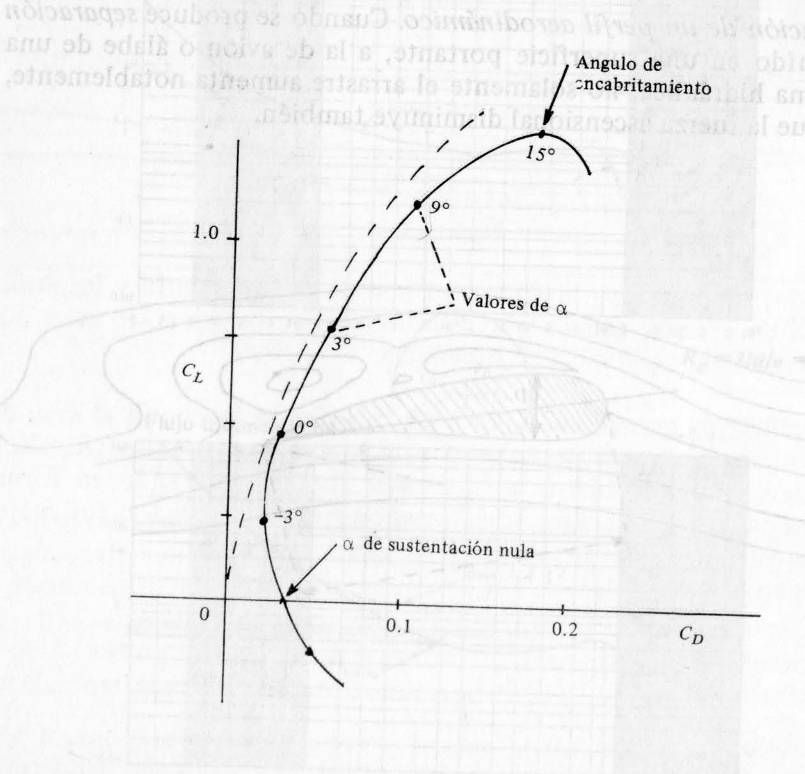


Figura 13.22. Diagrama polar. Valores aproximados para $E \approx 5$.

Ejemplo:

Una chimenea cilíndrica de 1 m de diámetro y de 25 m de altura está sometida a un viento uniforme de 60 Km/hora. Las condiciones atmosféricas son de 20°C y presión de 1 bar. Determínese el momento flector que se produce en la base de la chimenea como consecuencia del empuje del viento.

Solución:

El coeficiente de arrastre es dado por la fórmula (13.26)

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 A},$$

donde A es el área que el cuerpo opone el avance del fluido.

En el caso presente

$$A = Ld,$$

donde L es el largo de la chimenea y d su diámetro.

La fuerza de arrastre es pues

$$F_D = \frac{1}{2}\rho U_0^2 C_D Ld,$$

y el momento que produce al pie de la chimenea

$$M_0 = \frac{L}{2} F_D = \frac{1}{4}\rho U_0^2 C_D L^2 d.$$

El coeficiente de arrastre se evalúa primero calculando el número de Reynolds

$$R_e = \frac{U_0 d}{\nu}.$$

Para ello, calculemos primero

$$U_0 = 60 \text{ km}/h = 16.67 \text{ m/seg}.$$

De la tabla 1.4, $\nu = 1.7 \times 10^{-5}$ m^2/seg, luego

$$R_e = \frac{16.67 \times 1}{1\ 7 \times 10^{-5}} = 1.11 \times 10^6$$

De la tabla 13.2, se obtiene, suponiendo el caso más desfavorable de una pared lisa

$$C_D \cong 0.35$$

El momento es, pues,

$$M_0 = 0.35 \times \frac{1}{4} (16.67)^2 \times 1 \times (25)^2 \times 1 = 15197\, N - m.$$

Ejercicios

1. Se llama velocidad de caída de un cuerpo en un fluído, la velocidad límite que alcanza el cuerpo cuando su peso es equilibrado por las fuerzas generadas por el fluido: el empuje hidroestático y la fuerza de arrastre debida al movimiento. Calcúlese la velocidad de caída, (velocidad de sedimentación), de un grano de arena de 1.5 mm de diámetro en el agua, suponiéndolo de forma esférica y sabiendo que la densidad del cuarzo (arena) es de 2500 kg/m³. Se supondrá el agua a la temperarura de 20°C.

2. Calcular la fuerza de arrastre que actúa sobre un cilindro de 15 m de alto y 15 cm de diámetro sujeto a un viento de 50 km/ hora y a otro de 100 km/hora. Se hace la misma pregunta para un cilindro de 30 cm de diámetro y se pide discutir los resultados.

3. En una corriente de aire a la temperatura de 30°C, se coloca una esfera de 10 cm de diámetro y se observa que resulta sujeta a una fuerza de 2.5 N ¿Cuál es la velocidad del aire?

Apéndices

APENDICE 1

Flujo potencial en tres dimensiones

En la solución de problemas en tres dimensiones se parte de las ecuaciones(5.7), (5.9) y (5.16) como era de esperar. Con el objeto de poder satisfacer las condiciones de contorno en forma utilizable, se escriben dichas ecuaciones en el sistema de coordenadas en donde la geometría de los contornos se exprese de manera más sencilla. En lo que sigue se utilizarán coordenadas cilíndricas y esféricas.

Además existen varios métodos para llegar a la solución adecuada de la ecuación de Laplace. El más natural consiste en tratar de encontrar una solución general de

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{1}$$

y particularizarla para el problema dado. Este se llama el *método directo.* Otra posibilidad surge como se ha visto en el caso plano, de considerar distintos flujos con condiciones de cortorno interesantes. Este método, llamado "inverso" aunque no siempre arroja el problema que precisamente se busca, resulta sin embargo muy fructífero.

1. Función de corriente de Stokes. El flujo tridimensional se caracteriza muy a menudo por ser *axisimétrico,* esto es con una

dirección privilegiada, alrededor de la cual tanto el campo de velocidades como los contornos, presentan una simetría axial.

Hablando en términos de coordenadas esféricas, r_e, φ_e, θ_e, por ejemplo, ello significa que el campo de velocidades no tiene componente u_φ, y que además ninguna función, ni ninguna condición de contorno dependen de φ_e.[1]

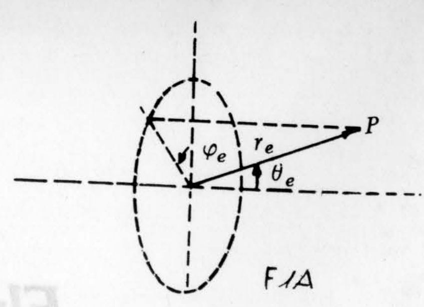


Figura 1.A.

En el caso de un flujo tridimensional axisimétrico, de un fluido incompresible, la ecuación de continuidad se puede reducir a dos sumandos, tanto en coordenadas esféricas como cilíndricas. Entonces se puede ver que es posible definir una función de corriente ψ, llamada de Stokes, de gran utilidad en la solución de dicho tipo de problemas.

Usando coordenadas esféricas, la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 ,$$

se escribe

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial (u_\theta \operatorname{sen} \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (2)$$

y, usando la hipótesis de axisimetría,

$$\frac{\partial (r^2 \operatorname{sen} \theta\, u_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r \operatorname{sen} \theta\, u_\theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (3)$$

Se ve pues que si se define una "función de corriente" $\psi = \psi(r, \theta)$ tal que

$$u_r = \frac{-1}{r^2 \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (4)$$

[1] El índice e se utiliza para indicar "esféricas", pero no se empleará cuando no exista peligro de confusión.

la ecuación de continuidad queda satisfecha. Esta es la función de corriente de Stokes. Es importnate observar que esta función está definida tanto para el *flujo rotacional* como *irrotacional*, puesto que su existencia depende sólo de la ecuación de continuidad.

Ejercicios

1. Mostrar que en coordenadas cilíndricas la función de corriente de Stkes cumple con la propiedad:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad u_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

2. Establecer la ecuación diferencial de segundo orden que satisface la función de corriente de Stokes para un flujo irrotacional, en coordenadas esféricas. Observar que no es la ecuación de Laplace. (Ver Cap. 3).

Respuesta: $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

2. *Método de las singularidades.* Se llama así el método que consiste en superponer, como se dijo, flujos "simples" en forma conveniente. Estos flujos "simples" son sencillamente soluciones de la ecuación de Laplace, obtenidas mediante la introducción de ciertas "singularidades" en uno o varios puntos del espacio.

a) Fuente puntual. Una de las singularidades que se presentan con más frecuencia es la llamada fuente o manantial. Esta consiste de lo siguiente: de un punto aislado del espacio se supone que sale o brota fluido en forma permanente, con un caudal λ, y que este fluido se distribuye isotropicamente en todas las direcciones.

Usando coordenadas esféricas el campo de velocidades inducido por una fuente de caudal o colocada en el origen de coordenadas puede expresarse por

$$u_r = \frac{\lambda}{4\pi r^2},$$

$$u_\theta = 0, \qquad u_\varphi = 0.$$

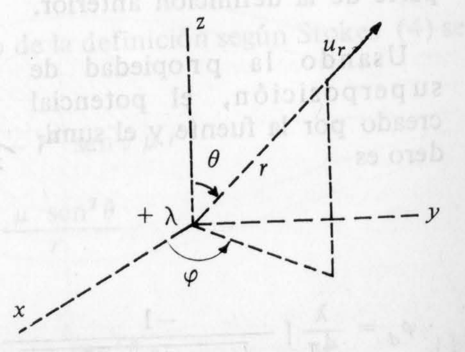


Figura 1.B.

Recordando que $u = \nabla \varphi$ se obtiene el potencial de velocidades

$$\varphi = -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{r} = -\frac{\lambda}{4\pi}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \tag{6}$$

el cual, como se comprueba fácilmente, satisface la ecuación de Laplace, tanto en coordenadas esféricas como cartesianas.

Se llama sumidero una fuente donde $\lambda < 0$.

Función de corriente. El flujo debido a una fuente se puede siempre considerar axisimétrico. Por consiguiente, en coordenadas esféricas se tiene

$$u_r = \frac{\lambda}{4\pi r^2} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$0 = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

De ahí se deduce inmediatamente

$$\psi = \frac{\lambda}{4\pi}\cos\theta. \tag{7}$$

b) Doblete. Se define un doblete como un nuevo ente que se obtiene cuando una fuente y un sumidero, de igual caudal, se acercan uno a otro hasta confundirse, de manera tal que el producto del caudal por la distancia que los separa permanezca constante.

Para encontrar el potencial de velocidades de un doblete se parte de la definición anterior.

Usando la propiedad de superposición, el potencial creado por la fuente y el sumidero es

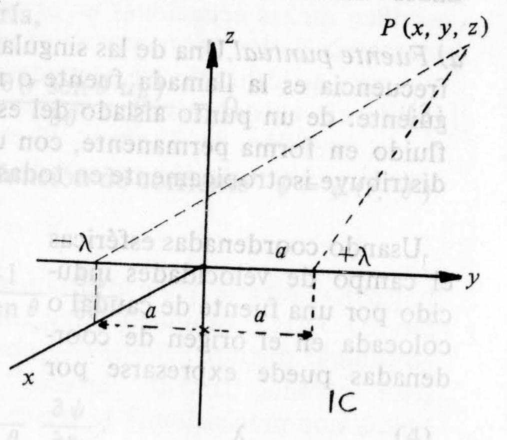


Figura 1.C.

$$\varphi_d = \frac{\lambda}{4\pi}\left[\frac{-1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right], \tag{8}$$

cuando fuente y sumidero están colocados como lo indica la figura.

Si se llama

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

se tiene

$$\varphi_d = \frac{\lambda}{4\pi}[\varphi_1(x+a) - \varphi_1(x-a)]$$

de donde, desarrollando en serie

$$\varphi_1(x+a) \quad \text{y} \quad \varphi_1(x-a),$$

$$\varphi_d = \frac{\lambda}{4\pi}\, 2a\, \varphi_1'(x) + 0(a^2) = -\frac{2a\lambda}{4\pi}\frac{x}{r^3} + 0(a^2).$$

Pasando el límite, cuando $a \Rightarrow 0$ con la condición $\frac{2a\lambda}{4\pi} = \mu =$ const se tiene el potencial de *un doblete*

$$\varphi = -\mu\frac{x}{r^3} = -\mu\frac{\cos\theta}{r^2}, \tag{9}$$

donde μ es la *intensidad* del doblete.

Las componentes de la velocidad son, puesto que

$$\vec{u} = \nabla\varphi$$

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2\mu\cos\theta}{r^3} \tag{10}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\mu\operatorname{sen}\theta}{r^3}$$

Función de corriente. Partiendo de la definición según Stokes (4) se tiene

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -r^2\operatorname{sen}\theta\,\mu\, r$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\mu\operatorname{sen}^2\theta}{r}$$

de donde, integrando

$$\psi = \frac{\mu\operatorname{sen}^2\theta}{r} \tag{11}$$

c) Flujo uniforme. Un tipo de flujo utilizado frecuentemente para superponerlo a los flujos "simples" ya definido es el flujo uniforme definido por

$$u_z = U_0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0.$$

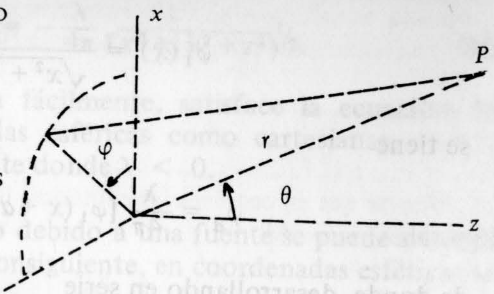


Figura 1.D.

El potencial de velocidades es

$$\varphi = U_0 z,$$

y por consiguiente, en coordenadas esféricas

$$\varphi = U_0\, r \cos\theta .$$

Las componentes de la velocidad

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = U_0 \cos\theta\,; \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = U_0 \operatorname{sen}\theta .$$

La función de corriente, entonces resulta ser, recordando (4)

$$\psi = -\frac{U_0}{2}\, r^2 \operatorname{sen}^2\theta \qquad (12)$$

3. Flujo potencial alrededor de una esfera. Considérese el flujo obtenido por superposición de un flujo uniforme U_0 y del de un

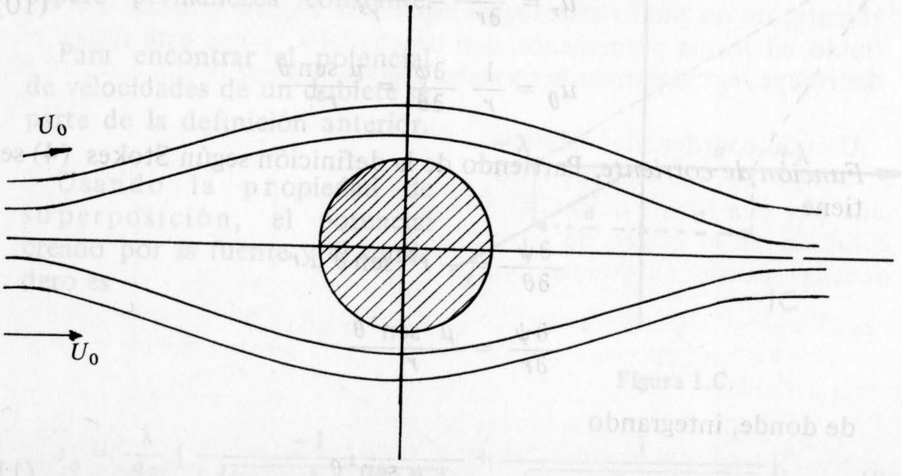


Figura 1.E.

doblete orientado según la dirección negativa del eje z. El potencial de velocidades y la función de corriente son, respectivamente,

$$\varphi = U_0 r \cos\theta + \frac{\mu \cos\theta}{r}$$

$$\psi = -\frac{r^2 U_0 \operatorname{sen}^2\theta}{2} + \mu\,\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}$$

Si se trata de determinar la forma de la línea de corriente correspondiente a $\psi = 0$, se obtiene

$$\operatorname{sen}^2\theta \left[\frac{\mu}{r} - \frac{r^2 U_0}{2}\right] = 0$$

esto es

$$\theta = 0, \pi \qquad \text{para toda } r$$

$$r_0 = \left(\frac{2\mu}{U_0}\right)^{1/3} \qquad \text{para toda } \theta$$

La línea de corriente consiste pues, del eje z y de la superficie esférica de radio r_0.

Invirtiendo el razonamiento, el flujo alrededor de una esfera de radio r_0 cuando la velocidad de aproximación es U_0 es dado por

$$\varphi = U_0\, r \cos\theta + \frac{U_0 r_0^3}{2}\,\frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\psi = -\frac{U_0}{2}\, r^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{U_0}{2}\, r_0^3\, \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}$$

Ejercicios

1. Verificar que los flujos creados por una fuente o por un doblete son irrotacionales.

2. Se define la intensidad de un doblete, más generalmente como un vector $\bar{\mu}$ tal que $|\bar{\mu}| = \mu$, que su dirección sea la de la recta que una fuente y sumidero que generaron el doblete, y que su sentido vaya del sumidero a la fuente. En estas condiciones mostrar que

$$\varphi = -\frac{\bar{u}\cdot\bar{r}}{r^3}.$$

4. Estudiar el flujo generado por un flujo uniforme y una fuente. a) Determinar la ecuación de la línea de corriente correspondiente a $\psi = -\lambda/4\pi$, y mostrar que el flujo exterior a esta línea puede considerarse como el flujo alrededor de un cuerpo que se extienda hasta $z = \infty$.

Este es el semi-cuerpo de *Rankine*.
b) Encontrar la presión de estancamiento.
c) Determinar la presión que el flujo ejerce sobre el semi-cuerpo, y la fuerza neta F_D de arrastre.

Respuestas: a) $\theta = 0, \pi, \quad r^2 = \dfrac{\lambda}{4\pi\, U_0 \,\mathrm{sen}^2\, \theta/2}$

c) $p = -\dfrac{\rho U_0^2}{2}\left[\dfrac{\lambda^2}{16\,\pi^2\, r^4 U_0^2} + \dfrac{\lambda \cos\theta}{2\pi\, r^2\, U_0}\right]; \quad F_D = 0$

5. Determinar la distribución de presiones sobre una esfera de radio r_0, cuando el flujo es uniforme en el infinito, con una velocidad U_0.

APENDICE 2

Cálculo de Errores

1. Introducción

Si una magnitud física es medida directamente mediante algún instrumento científico, se dice que es una *medición directa.* Así por ejemplo, una longitud se mide comparándola directamente con un cierto patrón.

Si una magnitud física se obtiene como resultado de un cálculo llevado a cabo usando una fórmula o cualquier otro procedimiento, se dice que se está haciendo una *medición indirecta.* Así por ejemplo un caudal se *calcula* conocida la velocidad y el área.

Evidentemente según el procedimiento seguido, una misma magnitud puede resultar medida directa o indirectamente: de esta manera en topografía las distancias se miden a veces directa y otras indirectamente.

La *determinación de los errores* en la medición de una magnitud depende mucho de si una medición es directa o indirecta. En el caso de una *medición directa,* el método más seguro es el estadístico. Este exige, para tener sentido, efectuar un gran número de mediciones de la misma magnitud. El valor adoptado es el promedio de los valores obtenidos y el error se aprecia en base del número de mediciones llevadas a cabo, n. El número n debe ser normalmente $n \geqslant 10$ para que el procedimiento arroje resultados probables.

Como en las mediciones efectuadas en muchos laboratorios, no se cumple esta condición, es a menúdo inútil pensar en el enfoque estadístico. Conviene simplemente *estimar el error* en base al procedimiento seguido en la medición; por ejemplo al leer en una escala graduada es fácil *estimar* cual es el error de lectura que se puede cometer.

Error absoluto. Sea a una longitud, por ejemplo, medida con una regla graduada. Si sobre la regla están marcados los milímetros, una cota del posible error de lectura puede ser

$$\Delta a = 0.5 \text{ mm.}$$

Esta cantidad se llama *cota superior del error absoluto* si se admite que el error no es ciertamente superior a 0.5 mm. El *verdadero valor* a_v de la magnitud a sería entonces

$$a - \Delta a \leqslant a_v \leqslant a + \Delta a,$$

ya que en general no se conoce el signo de Δa.

Se dice también que a_v está comprendido entre

$$a \pm \Delta a$$

Error relativo. Más importante que el error absoluto Δa es frecuentemente su relación a la magnitud medida. Se llama error relativo cometido sobre la magnitud a al cociente

$$\frac{\Delta a}{a}$$

Así por ejemplo, si $\Delta a = 0.5$ mm., como anteriormente y $a = 45.3$ cm, se tiene

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{0.5}{453} = 0.0011 = 1.1 \times 10^{-3}$$

La medición de masas o fuerzas se presta a mediciones directas con las mismas definiciones anteriores. Las temperaturas ofrecen ciertas dificultades que se pueden discutir en los ejemplos.

La *"estimación"* de las mediciones directas puede parecer un procedimiento poco riguroso. Conduce sin embargo casi siempre a buenos elementos de juicio para el experimentador.

Mediciones indirectas. Cuando una magnitud física se deduce de otras, medidas directamente, se dice que se está haciendo una *medición indirecta.* Así como el ejemplo anterior, un caudal se mide mediante la fórmula

$$\dot{V} = A\,U.$$

Ahora bien, si sobre la velocidad medida directamente se ha cometido un error absoluto ΔU, o relativo $\Delta U/U$, y sobre el área un error ΔA, se pregunta cual es el error que resulta para $\dot{V}$. Este es el problema de la medición indirecta.

Para resolverlo en general, basta observar que la magnitud medida, sea F, es una función de las magnitudes medidas directamente, x, y, z, por ejemplo. Si se admite que los errores son pequeños y por consiguiente que se pueden tratar, en primera aproximación, como diferenciales, se tiene, de

$$F = F\,(x, y, z),$$

el error

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\Delta z\,.$$

Casos particulares importantes son los siguientes:

Una suma

Si $\quad F = x + y + z, \qquad \Delta F = \Delta x + \Delta y + \Delta z.$

Un producto

Si $\quad F = x\,y\,z, \qquad \dfrac{\Delta F}{F} = \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y} + \dfrac{\Delta z}{z}$

Un cociente

Si $\quad F = \dfrac{x}{y}, \qquad \dfrac{\Delta F}{F} = \dfrac{\Delta x}{x} + \dfrac{\Delta y}{y}\,.$

(El signo + en esta última ecuación se coloca debido a que no se conoce el *signo* de Δy).

Un exponente

Si $\quad F = x^n \qquad \dfrac{\Delta F}{F} = n\,\dfrac{\Delta x}{x}$

Ejemplos

1. Para medir una velocidad promedio en una tubería, se ha determinado el caudal $\dot{V} = 7$ lts/seg, con un error no mayor de $\Delta \dot{V} = \pm\, 0.2$ lts/seg., y el área de la sección midiendo el diámetro, que resultó ser

$$D = 63 \pm 0.5 \text{ mm.}$$

¿Cuánto es la velocidad promedio y con qué error se la conoce?

Solución:

La velocidad resulta de una medida indirecta, y es dada por

$$U = \frac{\dot{V}}{\pi/_4\, D^2}$$

Su valor es

$$U = \frac{0.007 \text{ m}^3/\text{seg}}{\pi/_4 \times (0.063)^2 \text{m}^2} = 2.24 \text{ m/seg.}$$

Cálculo de errores: Se supone que el valor de π no introduce errores, ya que se puede tomar con tantas decimales como haga falta. Entonces

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta \dot{V}}{\dot{V}} + 2\,\frac{\Delta D}{D}\,.$$

(El signo + aparece porque no se sabe en qué sentido se produjo el error sobre el diámetro.) Por consiguiente,

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{0.20}{7} + 2\,\frac{0.5}{63} \cong 0.028 + 0.016 = 0.044.$$

De aquí se saca

$$\Delta U = \pm\, 0.044 \times 2.24 = \pm\, 0.098 \sim \pm\, 0.1$$

De donde

$$U = 2.24 \pm 0.1 \text{ m/seg.}$$

Conclusiones

a) Se ve que no tiene ningún sentido la segunda decimal en el valor de U. Debiera escribirse $U = 2.2 \pm 0.1$.

b) Para mejorar U hay que mejorar la medición de $\dot{V}$, que introduce el *mayor error*.

2. Suponiendo el coeficiente de caudal C_d constante, el caudal de un vertedero triangular es dado por

$$\dot{V} = \frac{8}{15}\, C_d \left(tg\,\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{2\, g\, h^5}$$

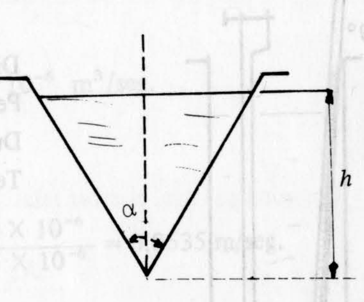


Figura 2.A.

Si al medir la altura h se ha cometido un error Δh y si se ha cometido otro, $\Delta\alpha$ al medir α, calcular error con que se conoce $\dot{V}$.

Solución:

De las relaciones deducidas se concluye que

$$\Delta \dot{V} = \frac{\partial \dot{V}}{\partial \alpha}\,\Delta\alpha + \frac{\partial \dot{V}}{\partial h}\,\Delta h,$$

esto es

$$\Delta \dot{V} = \frac{8}{15}\, C_d \sqrt{2\, g\, h^5} \cdot \frac{1}{2\cos^2 \alpha/2}\,\Delta\alpha + \frac{8}{15}\, C_d \left(tg\,\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{5}{2}\, h^{3/2}$$

Es evidente que vale más trabajar con errores relativos, puesto que entonces se tiene

$$\frac{\Delta \dot{V}}{\dot{V}} = \frac{\Delta\, tg\,\frac{\alpha}{2}}{tg\,\alpha/2} + \frac{5}{2}\,\frac{\Delta h}{h}$$

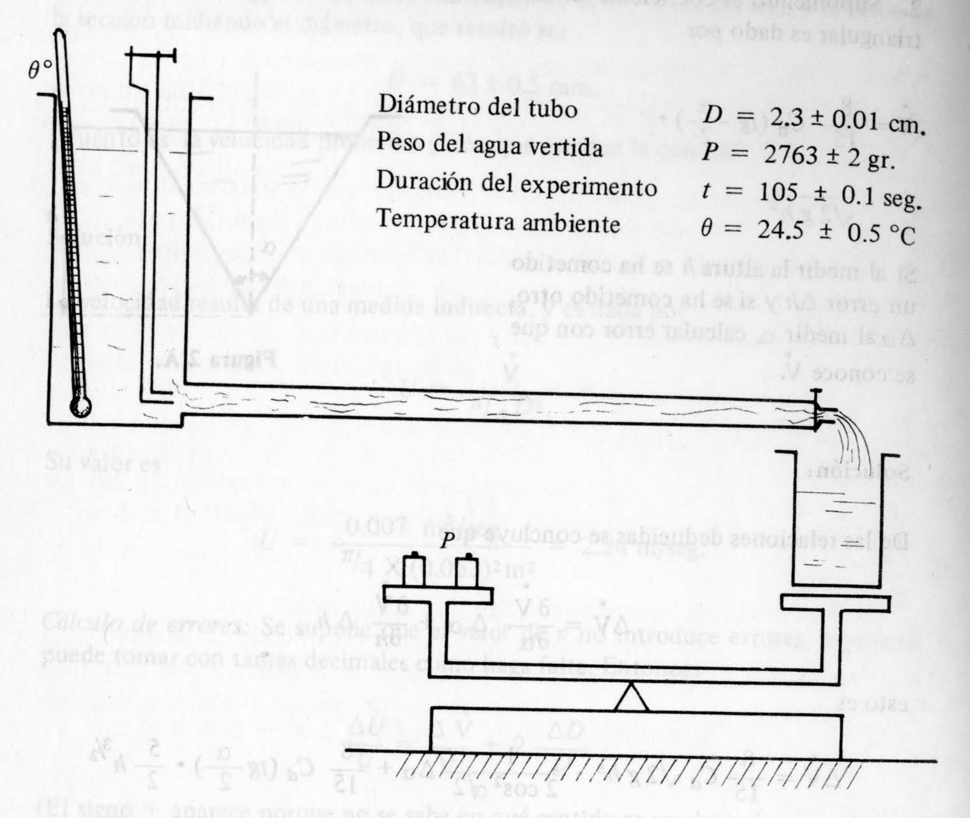
esto es, ya que,

$$\Delta\, tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}\,\Delta\alpha$$

$$\frac{\Delta \dot{V}}{\dot{V}} = \frac{\Delta\alpha}{\text{sen}\,\alpha} + \frac{5}{2}\,\frac{\Delta h}{h}\,.$$

Las dos fórmulas son naturalmente equivalentes.

3. En un experimento para determinar el valor de R_e para el cual empieza la turbulencia en un tubo, *(experimento de Reynolds)* se hicieron las siguientes mediciones:



Diámetro del tubo	$D = 2.3 \pm 0.01$ cm.
Peso del agua vertida	$P = 2763 \pm 2$ gr.
Duración del experimento	$t = 105 \pm 0.1$ seg.
Temperatura ambiente	$\theta = 24.5 \pm 0.5$ °C

Figura 2.B.

Para esas condiciones se observó el inicio de la turbulencia Determínese el número de Reynolds y la precisión con la cual se lo conoce.

Solución:

Para calcular el número de Reynolds $R_e = \dfrac{UD}{\nu}$, se determinan separadamente las cantidades U, D, ν,

Determinación de la velocidad:

Se supone que el experimentador, al determinar el caudal por peso, sabe bien calcular el error que comete en la pesada.

Volumen vertido:

$$V = \frac{p}{\rho g} = \frac{2.763 \times 9.81}{997 \times 9.81} = 2.773 \times 10^{-3}\ m^3$$

Caudal:

$$\dot{V} = \frac{2.773 \times 10^{-3}}{105} = 26.4 \times 10^{-6}\ \ m^3/\text{seg.}$$

La velocidad es, entonces,

$$U = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4}\ D^2} = \frac{26.4 \times 10^{-6}}{\frac{\pi}{4} \times 0.023} = \frac{26.4 \times 10^{-6}}{416\ \times 10^{-6}} = 0.0635\ \text{m/seg.}$$

Determinación de la viscosidad. De la tabla 1-4, se obtiene por interpolacióı

$$\theta = 20°, \quad \nu = 1.005 \times 10^{-6}\ \ m^2/\text{seg.} \qquad \theta = 24.5°, \quad \nu = 0.914 \times 10^{-6}\ m^2/\text{seg.}$$

$$\theta = 30°, \quad \nu = 0.802 \times 10^{-6}\ \ m^2/\text{seg}$$

Número de Reynolds

$$R_e = \frac{UD}{\nu} = \frac{0.0635 \times 0.023}{0.914 \times 10^{-6}} = 1600$$

Cálculo de errores

Error en el volumen:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

El peso específico varía con la temperatura. Un error en ésta produce un error en ρg. De la tabla consultada se deduce que si

$$\Delta\theta = 1°C, \ \Delta\rho = \ 0.23\ \text{Kg/m}^3.$$

Luego, ya que aquí

$$\Delta\theta = \ 0.5°C$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{2}{2763} + \frac{0.115}{997} = 0.7 \times 10^{-3} + 0.15 \times 10^{-3} = 0.85 \times 10^{-3}$$

Error en el caudal

$$\frac{\Delta\dot{V}}{\dot{V}} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta t}{t} = 0.85 \times 10^{-3} + \frac{0.1}{103} = 1.85 \times 10^{-3}$$

Error en el número de Reynolds

Apliquemos ahora directamente el cálculo de errores a la fórmula de definición de R_e. Puesto que $U = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4} D^2}$, se obtiene, simplificando

$$R_e = \frac{UD}{\nu} = \frac{\dot{V}}{\frac{\pi}{4} \nu D}$$

Por consiguiente, el error relativo sobre R_e es

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = \frac{\Delta \dot{V}}{\dot{V}} + \frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta \nu}{\nu}$$

Se ve que queda por determinar el *error sobre la viscosidad*. Consultando una tabla de valores de ν, para $\theta = 24.5°$ C y un error $\Delta\theta = 0.5$ °C, se tiene

$$\Delta \nu = 0.046 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg.}$$

Por consiguiente, se puede escribir

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} = 1.85 \times 10^{-3} + \frac{0.01}{2.3} + \frac{0.046}{0.9}$$

$$= 1.85 \times 10^{-3} + 5 \times 10^{-3} + 51 \times 10^{-3}$$

Es de observar que el mayor error introducido en R_e proviene del error en la viscosidad: $\Delta\nu/\nu = 51 \times 10^{-3}$. Ello proviene evidentemente del error grande $\Delta\theta$ en la temperatura. *Por consiguiente una mejora del experimento requiere primordialmente una mejora de* $\Delta\theta$. Este es el tipo de conclusiones importantes que que permite hacer el cálculo de errores. En segundo puesto como se ve, convendría mejorar la precisión del diámetro.

Continuando con los cálculos se obtiene pues

$$\frac{\Delta R_e}{R_e} \cong 58 \times 10^{-3}$$

El error absoluto sobre R_e es pues

$$\Delta R_e = 58 \times 10^{-3} \times 1600 = 92.$$

Por tanto,

$$R_e = 1600 \pm 92,$$

esto es

$$1508 < R_e < 1692.$$

BIBLIOGRAFIA

a) Citada en el texto

M. Alonso, E.J. Finn, *Physics*, Addison-Wesley.

G.K. Batchelor, *The theory of homogeneous turbulence*, Cambridge U.P.

J. Boussinesq, *Théorie de l'ecoulement tourbillonant*, París, 1897.

C.F. Colebrook, *Journal of the Institution of Civil Engineers*, London, Vol. II, 1938-1939.

S. Crocker, R.C. King, *Piping Handbook*, 5º Edit., McGraw-Hill.

J.O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill

Th. von Kárman, *Ueber laminare und turbulente Reibung*, ZAMM, Bd. 1,1923.

J.H. Keenan, E.P. Neumann, Measurements of Friction in pipes for subsonic and supersonic Flow of air, *J. App. Mech.*, Vol. 13, No. 2.

H.L. Langhaar, *Dimensional analysis and the theory of models*, Wiley

J. León, mecánico, Limite, 1979

E. Lévi, *Elementos de mecánica del medio* continuo, Wiley-Limusa, 1971

B.S. Massey, *Mechanics of Fluids*, Van Nostrand.

L.F. Moody, *Transactions*, A.S.M.E., 1944.

Nikuradse, Verein Deutscher Ingenieure (VDI) *Forschungs Heft* 361,1933.

L. Prandtl, Uber Flüssigkeitbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verh. des 3. *Intern.Math.Kongr.*, Heidelberg, 1904.

L. Prandtl, Sobre el movimiento de Fluidos de viscosidad muy pequeña, *Soc. Venez. de Ing. Hidra.*, Junio 1968.

L. Prandtl, *Führer durch die Strömungslehre*,3. Aufl., 1949.
M. Reiner, *Rhéologie théorique*, Dunod, 1955.
O. Reynolds, *Phil.Trans.Roy.Soc.*, London, Vol. 174,1883 y Vol. 186,1895.
H. Rouse, *Elementary Mechanics of Fluids*, Wiley.
H. Schlichting, Teoría de la capa Limite, Urmo.
E. Schmidt, *Properties of Water and Steam in SI units*, Springer, 1969.
F.W. Sears, *Mecánica, calor y sonido*, Aguilar.
Van Vlack, *Elements of Materials Science*, Addison-Wesley, 1964.

b) Recomendada como complemento

Ballofet, Gotelli, Meoli, *Hidráulica*, 2 Vo., Ediar.
Becerril, *Hidromecánica*, Dossat.
E.A. Brun, A. Martinot-Lagarde, J. Mathieu, *Mécanique des Fluides*, Dunod
J.W. Dailey, D.R.F. Harleman, *Fluid Dynamics*, Addison-Wesley.
J. Domínguez, *Curso de Hidráulica*, Talleres el Imparcial, Santiago de Chile.
A.G. Hansen, *Fluid Mechanics*, Wiley.
W. Kaufmann, *Technische Hydro-und Aeromechanik*, Springer.
E. Lévi, *Hidrodinámica*, México.
E. Macagno, Fundamentos de la Mecánica de los Fluidos, *Consejo Nac. Invest. Cient. y Tecn.*, Buenos Aires. Harper & Row Pbl.
R.H. Sabersky, A.J. Acosta, E.G. Hauptmann, *Fluid Flow*, 2d Edit. The Macmillan Co.
V.L. Streeter, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill.
E. Truckenbrodt, *Strömungsmechanik*, Springer, 1968.
C-S. Yih, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill.

Indice Alfabético

ESTA OBRA SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA
24 DE JUNIO DE 1993, EN LOS TALLERES DE
PROGRAMAS EDUCATIVOS, S.A. DE C.V.
CHABACANO NÚM. 65, LOCAL "A"
MÉXICO, D. F.

LA EDICIÓN CONSTA DE 500 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICIÓN

ESTA OBRA SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA
24 DE JUNIO DE 1991, EN LOS TALLERES DE
PROGRAMAS EDUCATIVOS, S.A. DE C.V.
CHABACANO NÚM. 65, LOCAL "A"
MÉXICO, D. F.

LA EDICIÓN CONSTA DE 500 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICIÓN

La colección **Ciencias del Ingeniero** que se inicia con esta obra, pretende ofrecer a los ingenieros de las nuevas generaciones un conjunto de textos en donde se haga uso de todos los conocimientos y de la madurez que todo técnico de alto nivel ha de poseer. De esta manera se espera huir de los manuales recetarios y orientar a los jóvenes al pleno uso de sus facultades mentales, incluso en la solución de los problemas más concretos o más intrincados. Podrán entonces aplicar esa habilidad de razonar (es de esperar) no solamente a los problemas técnicos del desarrollo y de sus consecuencias, sino también a los problemas de toda índole con que se confrontarán sin duda en el futuro. El pensamiento ordenado y potente que ofrecen las disciplinas físico-matemáticas, aplicado a los problemas ingenieriles, constituirá pues el hilo conductor de esta colección. Se trata del camino óptimo en tiempo y en esfuerzo, a nuestro juicio, para el dominio consciente de las leyes naturales y su mejor utilización en todo el ambiente del hombre.

He aquí un nuevo texto de Mecánica de Fluidos que se recomienda a las nuevas generaciones por su enfoque sistemático de los principales capítulos de esta disciplina. Partiendo del principio de que el arte del ingeniero, esto es, su habilidad como diseñador, tiene que apoyarse necesariamente en el conocimiento científico de los fenómenos naturales, este texto pretende presentar dichos fenómenos tal como son, en toda su complejidad física y matemática. Cree el autor, en efecto, que hay una diferencia fundamental entre el técnico y el ingeniero. Este último, por lo menos, debe *saber* lo que está haciendo, pues ésa es la condición *sine qua non* de la creatividad, de la independencia y el progreso tecnológicos.

A estos efectos se presentan las leyes fundamentales de la mecánica de los fluidos y sus aplicaciones en forma inductiva, es decir, de las particulares, (ecuación de Euler), a las más generales, (Navier-Stokes), para culminar la exposición con los casos más complejos del flujo compresible y del turbulento. En el camino, naturalmente se cubren asuntos colaterales como son el análisis dimensional y la ecuación de la energía.

La obra está ordenada de manera tal que ciertas secciones de los primeros capítulos pueden ser omitidas sin perjuicio de los capítulos esenciales de la obra. Los últimos capítulos, por otra parte, son independientes unos de otros. De esta manera el libro puede ser usado, y lo ha sido por varios años, como texto para cursos de uno o de dos semestres.

